Mmi Former pour réussir

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

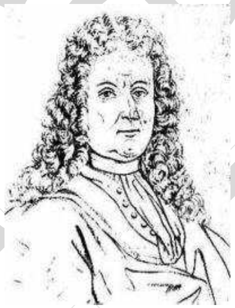
Devoir Libre

Eq. diff et séries entière (CCP 2008, PC)

5 FÉVRIER 2013

Blague du jour

☛ Que signifie le sigle B.U.S.H ?
-Réponse : Bombarder Uniquement Saddam Hussein ....
☛ Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"



La famille des Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Mathématicien du jour

Etude et résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries entières

Dans cet exercice, on appelle solution d'une équation différentielle sur un intervalle I toute fonction deux fois dérivable sur I, solution de cette équation sur I.

1) Rappeler les développements en séries entières des fonctions exp, ch et sh. On précisera pour chaque série entière le rayon de convergence qui lui est associé.

2) Soit l'équation différentielle (H) :
$$(H) \quad x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$$
On cherche une solution de (H) sous la forme
$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

2a. On suppose que $R > 0$ et que y est solution de (H) sur $]-R, R[$. Etablir des relations de récurrence portant sur les coefficients a_n, et donner la valeur de a_0.

2b. On suppose que les relations établies en **2a** sont satisfaites. Montrer alors que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est combinaison linéaire de deux séries entières (indépendantes des a_n) que l'on précisera.

2c. Pour chacune des deux séries entières mises en évidence en **2b**, déterminer le rayon de convergence et l'expression de la somme.

2d. En déduire que y est effectivement solution de (H). Donner son rayon de convergence R, et l'expression de sa somme sur $]-R, R[$.

3) On pose $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

3a. Vérifier que la fonction $y_1 : x \mapsto x\text{ch}(x)$ est solution de (H) sur I_1 et I_2.

3b. Résoudre (H) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de Lagrange.

3c. Existe-t-il des solutions de (H) sur $\mathbf{R}$?

4) Soit l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = x^3 + x^4$$

4a. Résoudre (E) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de la variation des deux constantes.

4b. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.

4c. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbf{R}$ est développable en série entière, et préciser les coefficients de cette série entière et son rayon de convergence.

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com