.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n˚28 (CNC 2000, MP)

Équations différentielles
Un exemple de transformée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Que signifie le sigle B.U.S.H ? Bombarder Uniquement Saddam Hussein ....
- Pourquoi est-ce que les chimistes ne prennent jamais les autoroutes ?

\- Parce qu'ils préfèrent les routes sans pH.

Al Farabi (872-950)

Muhammad ibn Muhammad ibn Tarkhan ibn Uzalagh al-Farabi, né à Khorasan en Afghanistan, il meurt à Damas. Il approfondit toutes les sciences et tous les arts de son temps, et est appelé le Second instituteur de l'intelligence, le "Premier Maître" n'étant autre qu'Aristote. On lui doit un commentaire de La République de Platon, ainsi qu'un Sommaire des Lois de Platon. On lui reconnait aussi ses talents dans la musique et la poésie. Sa mort fut tragique : tué par des voleurs en route.

Mathématicien du jour

définitions et notations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}.$$

Pour $(x,t) \in [0,1]^2$, on pose :

$$K(x,t) = \frac{t^2}{x} \text{ si } x > t,\ K(x,t) = K(t,x) \text{ si } t > x \text{ et } K(x,x) = x.$$

On désigne par $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose :

$$Tf\ :\ [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)\ dt.$$

On notera en général de la même façon une fonction et une de ses restrictions un sous intervalle de son intervalle de définition maximum.

1 Partie I

1 Vrifier que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$ définit une fonction $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathbf{C}^1$.

2 Exprimer pour $x \in \mathbb{R}_+$, $xG'(x) + \frac{3}{2}G(x)$ l'aide de fonctions usuelles simples.

2 Partie II

1 a Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, préciser $Tf(0)$ et montrer la continuité de Tf en 0.

b Montrer que $f \mapsto Tf$ définit un endomorphisme T de $\mathcal{C}([0,1])$.

2 T est-il surjectif ?

3 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On pose $F = Tf$.

a Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\, dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

b Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$. Établir une relation entre $F(1)$ et $F'(1)$.

c Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,1]$ et vérifie sur $]0,1]$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f.$$

4 On considère l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0.$$

a Trouver les solutions de (E_0) sur $]0,1]$ de la forme $x \mapsto x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

b En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) sur l'intervalle $]0,1]$.

c En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, Tf est la seule solution sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

5 On dira qu'un rel λ est valeur propre de T s'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tel que $Tf = \lambda f$ et $f \neq 0$. Dans ce cas, on dira que f est un vecteur propre de T associé λ.

Montrer que λ est une valeur propre non nulle de T si et seulement s'il existe une solution non nulle sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$\lambda x^2y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

3 Partie III

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda)\ :\ \lambda x^2 y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0.$$

1 Montrer qu'il existe une et une seule solution f_λ de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que

$$f_\lambda(x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

2 Donner $K_\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_\lambda(x) = K_\lambda \sqrt{x}\, G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\, x\right).$$

3 a Justifier l'existence de $a > 0$ tel que f_λ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, a]$.

b Soit y une solution de (E_λ) sur $]0, 1]$. On pose $z = \dfrac{y}{f_\lambda}$. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifie par z'.

c En déduire qu'il existe une solution g_λ de (E_λ) sur $]0, 1]$ telle $g_\lambda(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4 Une telle solution g_λ étant choisie.

c Montrer que la famille (f_λ, g_λ) d'éléments de $\mathcal{C}(]0, 1])$ est libre.

b Décrire alors l'ensemble $\sum_0$ des solutions sur $]0, 1]$ de l'équation différentielle (E_λ).

a Montrer que les solutions de (E_λ) sur $]0, 1]$ qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 sont exactement les éléments de $\mathbf{Vect}(f_\lambda)$.

5 a

Montrer que toute valeur propre strictement positive de T est de la forme $\lambda_k = \dfrac{3}{k^2\pi^2}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

b Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ_k est effectivement valeur propre de T.

c Donner les vecteurs propres associés la valeur propre λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

4 Partie IV

On considère l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire $(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ pour f et g dans E. On notera $\|.\|$ la norme associe à ce produit scalaire. (On ne demande pas de redémontrer que l'on a bien défini un produit scalaire).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k\ :\ [0, 1] \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\, G(k\pi x)$ et $\phi_k = \dfrac{h_k}{\|h_k\|}$.

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

1 Montrer que $\forall (f, g) \in E^2$, $(Tf, g) = (f, Tg)$.

2
a. Calculer Th_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
b. Montrer que la famille $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de E.

3
a. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.
b. En déduire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t)\ dxdt$ et comparer le résultat avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2$.

4 Pour tout $x \in [0, 1]$, on note $K_x : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $t \mapsto K(x, t)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $K_{N,x}$ la projection orthogonale de K_x sur $\mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_N)$.
a. Donner l'expression de $K_{N,x}$.
b. Établir $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2\ dx = 0$.
c. Soit $f \in E$ et $F = Tf$. Montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \|F - \sum_{k=1}^{N} (F, \phi_k)\phi_k\|^2 = 0.$$

(On remarquera que $\forall x \in [0, 1]$, $F(x) = (K_x, f)$.)

FIN

À la prochaine