Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°28 (Pr. Deruelle)

Équations différentielles
Un exemple de transformée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Quand est-ce qu'on utilise le théorème suivant : "Selon la question n°(-), c'est trivial " ?
- Quand on copie du voisin.
- Pour inverser une matrice à déterminant nul.
- Quand on est au petit a du petit 1 du grand I au bout de trois heures le jour d'un concours.

Al-Farghani (805-880)

Mathématicien du jour

Abu'l-Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn Kathir connu sous le nom Alfraganus ou Alfergani, né en Ouzbékistan, est l'un des astronomes musulmans les plus célèbres du IXe siècle.
Il mesure le diamètre de la Terre et écrit en 833 Éléments d'astronomie sur le mouvement des corps célestes, inspiré de l'Almageste de Ptolémée, qui reste le livre d'astronomie le plus célèbre jusqu'au XVe siècle en Occident mais aussi en Orient. Ce livre est traduit en latin au XIIe siècle et exerce une grande influence au sein de l'astronomie européenne avant Regiomontanus. Il prend part à la révision des tables astronomiques de Ptolémée et compose, outre une introduction à l'astronomie, deux autres ouvrages, sur les cadrans solaires et l'astrolabe.
Le cratère lunaire Alfraganus fut nommé ainsi pour lui rendre hommage.

1 Première Partie

1 On a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+2)}=0$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n X^n$ est gal $+\infty$.

On en déduit que celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est gal $+\infty$. $\mathbf{G}$ apparat donc comme le produit de cette série entière par la fonction $x\mapsto x^{\frac{3}{2}}$ qui est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2

$$\forall x\in\mathbb{R}^+\ ,\ x\mathbf{G}'(x)+\frac{3}{2}\mathbf{G}(x)=x\left(x^{\frac{3}{2}}.\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n}\right)'+\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n}+x^{\frac{5}{2}}\sum_{n\geq 1}2nu_nx^{2n-1}+\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}}\left(3\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} 2nu_n x^{2n}\right) = x^{\frac{3}{2}}\left(3u_0 + \sum_{n\geq 1}(2n+3)u_n x^{2n}\right)$$
$$= x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} = \sqrt{x}\sin x\ .$$

2 Deuxième Partie

1 a) $\forall t\in[0,1], K(0,t)=0$. On en déduit que $Tf(0)=0$. On a par ailleurs :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ Tf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt + \int_x^1 K(x,t)f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt\ (\star).$$

Cela donne la majoration :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ |Tf(x)| \leq \|f\|_\infty\left[\frac{1}{x}x\int_0^x t^2dt + x^2\int_x^1\frac{dt}{t}\right] = \|f\|_\infty\left[\frac{x^3}{3} - x^2\ln x\right]\ .$$

On en déduit la continuité de Tf en $x=0$.

b) La linéarité de l'opérateur T découle de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs $(\star)$ montre, pour tout $f\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$, la continuité de Tf sur $]0,1]$. Enfin grâce au 1.(a) : $\forall f\in\mathcal{C}([\prime,\infty]), \mathcal{T}\{\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$. En conclusion T est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}([\prime,\infty])$.

2 T n'est pas surjectif : la question 1.(a) a montré que pour tout $f\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$, $Tf(0)=0$; or une fonction de $\mathcal{C}([\prime,\infty])$ ne s'annule pas nécessairement l'origine.

3 a) On a déjà montré ce résultat la question 1.(a).

b) $(\star)$ montre sans difficulté que F est de classe C^1 sur $]0,1]$. On obtient précisent :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2f(t)dt + 2x\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt\ .(\star\star)$$

D'o la majoration :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ |F'(x)| \leq \|f\|_\infty\left[\frac{x^2}{3} - 2x\ln x\right]\ .$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)=0$, puis classiquement par le théorème de "prolongement C^1" , que F est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $F'(0)=0$.

$(\star)$ et $(\star\star)$ montrent que $F(1)+F'(1)=0$.

c) En drivant $(\star\star)$ il vient :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F''(x) = \frac{2}{x^3}\int_0^x t^2f(t)dt + 2\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt - 3f(x)\ .$$

On en déduit grce $(\star)$:

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F''(x) = \frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{x}\int_0^x t^2f(t)dt + x^2\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt\right] - 3f(x) = \frac{2}{x^2}F(x) - 3f(x)\ .$$

4 a) Exprimons que $x \mapsto x^\lambda$ est solution de (E_0) :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda(\lambda-1)x^2x^{(\lambda-1)(\lambda-2)} - 2x^\lambda = x^\lambda \left[\lambda(\lambda-1)x^{(\lambda-2)^2} - 2\right] = 0 \ .$$

La seule possibilité est $\lambda = 2$.

b) $x \mapsto x^2$ ne s'annulant pas sur $]0,1]$, cherchons une autre solution sous la forme $y = x^2 z$. On est alors ramène à résoudre :

$$Z = z' \quad \text{et} \quad xZ' + 4Z = 0 \ .$$

On obtient : $Z = \dfrac{\text{Cste}}{x^4}$ = z' , puis $z = \dfrac{\text{Cste}}{x^3} + \text{Cste}$.

Une solution de (E_0) indépendante de $x \mapsto x^2$ est par exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Toute solution de (E_0) sur $]0,1]$ s'crit alors sous la forme :

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \quad \text{où} \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \ .$$

c) D'après ce qui précède, f étant donnée, Tf est bien solution du problème pos. Il s'agit donc de montrer que c'est la seule. Supposons pour cela que F et G soient solutions. Alors $F - G$ est solution de (E_0) et en conséquence il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(x) - G(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \ .$$

Le fait que $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) - G(x) = 0$ implique que $\beta = 0$. Il vient alors $F(x) - G(x) = \alpha x^2$, puis $F(1) - G(1) + F'(1) - G'(1) = \alpha + 2\alpha = 0$ entraîne que $\alpha = 0$. Finalement $F = G$.

5 Soit λ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associ. $Tf = \lambda f$ est alors solution du problème énoncé la question 4.(c). En particulier :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda f''(x) - \frac{2}{x^2}\lambda f(x) = -3f(x) \ .$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda x^2 f''(x) + \left(3x^2 - 2\lambda\right) f(x) = 0 \ .$$

Les autres conditions du problème, tant vérifies par λf, le sont par f.

Réciproquement, on montre par un calcul similaire que si f est une solution non identiquement nulle du problème posé dans cette question $(\lambda \neq 0)$, λf est solution de celui posé à la question 4.(c) : Tf tant l'unique solution de ce problème, on obtient : $Tf = \lambda f$ avec $f \neq 0$. Ce qui montre que f est valeur propre de T associ la valeur propre λ.

3 Troisième Partie.

1.et 2. Exprimons donc qu'une série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E_λ) sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[\ ,\ \lambda x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n - 2\lambda \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n\geq 2} \lambda[n(n-1)-2]a_n x^n + 3\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n$$

$$= -2\lambda(a_0+a_1x) + \sum_{n\geq 2}[\lambda(n+1)(n-2)a_n + 3a_{n-2}]x^n = 0\ .$$

Cela exige que $a_0 = a_1 = 0$. On en déduit que tous les coefficients de rang impair sont nuls. Par ailleurs a_2 peut être choisi arbitrairement et l'on a :

$$\forall n \geq 2\ ,\ a_{2n} = \frac{-3}{\lambda(2n+1)(2n-2)} a_{2n-2}\ ,$$

d'o l'on tire :

$$\forall n \geq 1\ ,\ a_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!} a_2\ .$$

La condition $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro est vérifie pour $a_2 = 1$. La seule série entière qui répond la question est alors :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!}x^{2n+2}\ .$$

On vérifie sans difficulté que son rayon de convergence est gal $+\infty$.

On obtient ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_\lambda(x) = \sqrt{x}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!}x^{2n+\frac{3}{2}} = \sqrt{x}\,3^{\frac14}\lambda^{\frac34}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)^{2n+\frac32}\ ,$$

c'est dire :

$$f_\lambda(x) = (3\lambda^3)^{\frac14}\sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)\ .$$

3. a) Cela découle directement de $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro.

b) Classiquement on cherche une solution de (E_λ) sur $]0,a]$ sous la forme $y = f_\lambda z$; un calcul sans difficulté montre que $Z = z'$ est solution de :

$$2f_\lambda' Z + f_\lambda Z' = 0\ .$$

c) On obtient alors : $Z = z' = \dfrac{\text{Cste}}{f_\lambda^2}$, puis $y(x) = f_\lambda(x).\displaystyle\int_x^{\star}\frac{\text{Cste}}{f_\lambda^2(t)}dt$.

La fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{f_\lambda^2(t)}$ n'tant pas intégrable sur $]0,\star]$, on obtient par “ intégration des relation de comparaison” , au voisinage de zéro :

$$y(x)\ \sim\ x^2\int_x^{\star}\frac{dt}{t^4}\ \sim\ \frac{\text{Cste}}{x}\ .$$

Ceci montre qu'il existe une solution y_λ de (E_λ) sur $]0,a]$ vérifiant au voisinage de zéro :

$$y_\lambda(x) \sim \frac{1}{x}.$$

Les solutions maximales de l'équation différentielle $\lambda y'' + \dfrac{3x^2-2\lambda}{x^2}y = 0$ sont définies sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$. Le résultat d'existence et d'unicité de telles solutions montre que y_λ se prolonge de faon unique en une solution sur $]0,+\infty[$ de (E_λ). En particulier il existe une solution g_λ sur $]0,1]$ qui prolonge y_λ.

4. a) Les équivalents respectifs de f_λ et g_λ au voisinage de zéro montrent que ces deux fonctions ne peuvent être colinéaires.

   b) Toute solution de (E_λ) sur $]0,1]$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda, \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

   c) Soit $h = \alpha f_\lambda + \beta g_\lambda$. La condition $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$ exige clairement $\beta = 0$. Réciproquement ...

5. a) Utilisons la caractérisation de la question II-5. : soit λ une valeur propre non nulle de T ; il existe alors une solution non identiquement nulle de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tend vers zéro à l'origine. D'après la question 4.(c), cette solution est proportionnelle f_λ.

   Voyons ce qu'entraîne la condition $f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = 0$:

$$f'_\lambda(x) = K_\lambda\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\sqrt{x}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)\right],$$

   donne :

$$f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = K_\lambda\left[G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right]$$

$$= K_\lambda\left[\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{3}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right] = K_\lambda\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) = 0.$$

   λ est donc nécessairement de la forme :

$$\lambda = \frac{3}{k^2\pi^2} = \lambda_k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

   b) Le calcul effectué dans la question précédente montre que si $\lambda = \lambda_k$, f_{λ_k}, qui est solution de (E_{λ_k}), vérifie bien les conditions requises (cf. question II-5) ... : λ_k est valeur propre de T, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

   c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est d'après ce qui précède $\mathrm{Vect}(f_{\lambda_k})$.

4 Quatrième Partie

1 On obtient sans difficulté :

$$\forall (f,g) \in E\ ,\ (Tf,g) = (f,Tg) = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} K(x,y)f(y)g(x)dxdy\ .$$

2 a) On a :

$$f_{\lambda_k}(x) = K_{\lambda_k}\sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda_k}}x\right) = K_{\lambda_k}\sqrt{x}\ G(k\pi x) = \left(3\lambda_k^3\right)^{\frac{1}{4}} h_k(x) = \frac{3}{(k\pi)^{\frac{3}{2}}} h_k(x)\ .$$

D'o :

$$Th_k = \lambda_k h_k = \frac{3}{k^2\pi^2} h_k\ .$$

b) Il vient pour k et $m \in \mathbb{N}^\star$ distincts :

$$(Th_k, h_m) = \lambda_k(h_k, h_m) = (h_k, Th_m) = \lambda_m(h_k, h_m)$$

qui montre que la famille $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthogonale.

On en déduit que la famille $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthonormale.

3 a) La fonction f est 2π périodique, continue , C^1 par morceaux et paire : le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que f est la somme de sa série de Fourier.

On a :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\forall n \geq 1\ ,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ntdt = \frac{-2}{\pi^3}\int_0^\pi t^2\cos ntdt = \frac{-2}{\pi^3}\cdot\frac{-2}{n}\int_0^\pi t\sin ntdt = \frac{4}{\pi^3 n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi\ .$$

On obtient finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ f(t) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nt\ .$$

b) Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt = \frac{8}{15} = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n(f)^2 = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\ .$$

D'o :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{8}{15} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{8}\cdot\frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

c) Un calcul direct donne :

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt = \int_0^1\left(\int_0^x \frac{t^4}{x^2}dt + \int_x^1 \frac{x^4}{t^2}dt\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^3}{5} + x^3 - x^4\right)dx = \frac{1}{10}\ .$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k\geq 1}\lambda_k^2 = \frac{9}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{10}\ .$$

4 a) On observera que pour tout $x \in [0,1]$, $K_x \in \mathcal{C}([/, \infty])$. On a :

$$K_{N,x} = \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, K_x)\Phi_k = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_0^1 K(x,t)\Phi_k(t)dt \right) \Phi_k = \sum_{k=1}^{N} T\Phi_k(x)\cdot\Phi_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\Phi_k(x)\cdot\Phi_k$$

b) Il vient :

$$\begin{aligned} \|K_x - K_{N,x}\|^2 &= \|K_x\|^2 - \|K_{N,x}\|^2 \\ &= \int_0^1 K^2(x,t)dt - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\Phi_k^2(x) \ . \end{aligned}$$

Puis :

$$\int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2 \int_0^1 \Phi_k^2(x)dx = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2 \ .$$

D'après ce qui précède, cette quantité admet pour limite zéro quand N tend vers $+\infty$.

c) On a donc :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ F(x) = \int_0^1 K_x(t)f(t)dt = (K_x, f) = (K_{N,x}, f) + (K_x - K_{N,x}, f)$$

et

$$(\Phi_k, F) = (\Phi_k, Tf) = (T\Phi_k, f) = \lambda_k(\phi_k, f)$$

qui entraînent pour $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ F(x) - \sum_{k=1}^{N}(\Phi_k, F)\Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\Phi_k(x)(\Phi_k, f) - \sum_{k=1}^{N}\lambda_k(\Phi_k, f)\Phi_k(x) + (K_x - K_{N,x}, f)\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|F - \sum_{k=1}^{N}(\Phi_k, F)\Phi_k\|^2 &= \int_0^1 \left(F(x) - \sum_{k=1}^{N}(\Phi_k, F)\Phi_k(x) \right)^2 dx \\ &\leq \|f\|^2 \cdot \int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx \ . \end{aligned}$$

La question précédente montre alors que :

$$\lim_{N\to+\infty} \|F - \sum_{k=1}^{N}(\Phi_k, F)\Phi_k\|^2 = 0 \ .$$

À la prochaine