XM6-CPGE My Youssef

Devoir Surveillé

Équations différentielles

Rabat le 8 avril 2010

Source: Concours National Commun – Session 2004 – MP

Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \tag{$\mathcal{E}_f$}$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, et lorsque ces conditions sont remplies, certaines propriétés des ces solutions sont ensuite étudiées.

I. Exemples et résultats généraux

1. **Un premier exemple**

   Soient α un réel et f_α la fonction $x \longmapsto e^{\alpha x}$.

   (a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$. Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$?

   (b) Ici on suppose que $\alpha \neq 1$.

   i. Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$.

   ii. À quel condition nécessaire et suffisante sur α cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$? Lesquelles ?

   (c) L'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ admet-elle des solutions bornées sur $\mathbb{R}$?

2. **Résultats généraux**

   (a) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$?

   (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont de la forme

   $$y_\lambda : x \longmapsto e^x\Big(\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt\Big), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (c) On suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est convergente et vaut λ.

   (d) Combien de solutions bornées au voisinage de $+\infty$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut-elle avoir au maximum ?

(e) On suppose maintenant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

i. Vérifier que, pour tout réel x, $\quad Y_f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt.$

ii. La solution Y_f est-elle nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$?

(f) On suppose ici que f est bornée.

i. Montrer que Y_f est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

ii. Si en outre f tend vers 0 en $+\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $+\infty$.

iii. Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

3. **Un autre exemple**

On pose

$$u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (n,p) \in \mathbb{N}^2.$$

(a) Montrer que, pour tout réel x, la suite double $\big(u_{n,p}(x)\big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(b) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$, où

$a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}, \ n \in \mathbb{N}.$

Dans la suite on pose $\quad u(x) = e^x \sin(e^x), \ x \in \mathbb{R}.$

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} u(t)\, dt$ est convergente.

(d) Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t)\, dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$

(e) En faisant une intégration par partie dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente, montrer que la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

II. Cas d'une fonction intégrable

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$

On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que la fonction G est continue, bornée et tend vers 0 en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.

3. Montrer alors que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |Y_f(x)| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\, dt,$$

puis en déduire que Y_f est bornée sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$.

4. Montrer que $Y_f = -G + Y_G$ et conclure que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.

5. Justifier que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.

6. Montrer alors que $Y_{|f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

7. En déduire que Y_f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

8. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur $\mathbb{R}$; on le muni de la norme N_1 définie, pour tout élément g de E , par
$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\, dt.$$
Montrer que l'application $\Phi : \ g \longmapsto Y_g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge

On suppose ici que f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout réel x,
$$F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que la fonction F est continue, bornée et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt$ est convergente et que
$$e^x \int_{x}^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt = F(x) - Y_F(x).$$
(*on pourra faire une intégration par partie*)

3. En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.

4. Montrer que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.

5. Montrer alors que Y_f possède une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$, égale à celle de f.

III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

On suppose ici que f est 2π-périodique.

1. Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution bornée qui est la fonction Y_f.

2. Montrer que Y_f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Calculer les coefficients de FOURIER complexes de Y_f en fonction de ceux de f.

4. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = Y_{f_n},\ n \geqslant 0$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficient de FOURIER complexes de f_n en fonction de ceux de f_1.

(b) Montrer que la série de FOURIER de f_1 est normalement convergente.

(c) En déduire la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big)$.

(d) En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|\Big).$$

(e) Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-on tirer de ce qui précède ?