Partie I

2)a) comme $y(t)=Ke^{t}$ et $y(0)=K=y_0$, on a $y(T)=y_0e^{T}$

b) $y_N=\left(1+\dfrac{T}{N}\right)^{N}y_0$ donc $\lim_{N\to+\infty} y_N=e^{T}y_0=y(T)$

c) $y(T)-y_N=y_0\left(e^{T}-e^{N\ln\left(1+\frac{T}{N}\right)}\right)$

$$=y_0e^{T}\left(1-e^{N\ln\left(1+\frac{T}{N}\right)-T}\right)\sim y_0e^{T}\left(T-N\ln\left(1+\frac{T}{N}\right)\right)$$

$$\sim y_0e^{T}\left(\frac{T^{2}}{2N}\right)$$

3)a) $(y'-ay)e^{-at}=be^{-at}=(ye^{-at})'\Leftrightarrow ye^{-at}=-\dfrac{b}{a}e^{-at}+K$

$$y(t)=-\frac{b}{a}+Ke^{at}$$

$$y(0)=y_0=-\frac{b}{a}+K$$

Donc $y(t)=\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{at}-\dfrac{b}{a}$ et $y(T)=\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{aT}-\dfrac{b}{a}$

b) Si $0\le k\le N-1$

$$y_{k+1}=y_k+\frac{T}{N}(ay_k+b)$$

$$z_{k+1}=y_{k+1}+\frac{b}{a}=y_k+\frac{b}{a}+a\frac{T}{N}\left(y_k+\frac{b}{a}\right)$$

$$=\left(1+\frac{aT}{N}\right)z_k=\left(1+\frac{aT}{N}\right)^{k+1}z_0$$

Et donc $z_N=\left(1+\dfrac{aT}{N}\right)^{N}z_0\Rightarrow y_N=\left(1+\dfrac{aT}{N}\right)^{N}\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{b}{a}$

Ce qui donne $\lim_{N\to+\infty} y_N=e^{aT}\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{b}{a}=y(T)$

c) $y(T)-y_N=\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)\left[e^{aT}-e^{N\ln\left(1+\frac{aT}{N}\right)}\right]=\left(y_0+\dfrac{b}{a}\right)e^{aT}\left(1-e^{N\ln\left(1+\frac{aT}{N}\right)-aT}\right)$

$$\sim\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{aT}\left(aT-N\ln\left(1+\frac{aT}{N}\right)\right)\sim\frac{a^{2}T^{2}}{2N}e^{aT}\left(y_0+\frac{b}{a}\right)$$

<u>Partie II</u>

4) a) $\left(ye^{-it}\right)' = e^{-it}y' - ie^{-it}y = 0$ donc $y' = iy \Leftrightarrow y = Ke^{it}$
Comme $y(0) = K = y_0$, $y(T) = y_0 e^{iT}$

b) $r_N = \sqrt{1+\frac{T^2}{N^2}} = e^{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{T^2}{N^2}\right)}$

$$\left(r_N\right)^N = e^{\frac{N}{2}\ln\left(1+\frac{T^2}{N^2}\right)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

$$1+i\frac{T}{N} = r_N\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{T^2}{N^2}}} + i\frac{\frac{T}{N}}{\sqrt{1+\frac{T^2}{N^2}}}\right) \text{ et } \cos\theta_N \in \Re_+$$

soit $1+i\frac{T}{N} = r_N\left(\cos\theta_N + i\sin\theta_N\right)$

ce qui donne $\theta_N \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\tan\theta_N = \frac{T}{N}$ *et* $\theta_N = \arctan\frac{T}{N}$

$N\theta_N = N\arctan\frac{T}{N} \sim T$ et $\lim_{N\to+\infty} N\theta_N = T$

c) $y_N = \left(1+\frac{iT}{N}\right)^N y_0 = \left(r_N e^{i\theta_N}\right)^N y_0 = \left(r_N\right)^N e^{iN\theta_N} y_0 \underset{N\to+\infty}{\to} e^{iT}y_0 = y(T)$

5)a) $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} = \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{N.N.....N}\frac{1}{k!} \le \frac{1}{k!}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} \text{ d'où } \left|e^Z - \left(1+\frac{z}{N}\right)^N\right| = \left|\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{z^k}{k!} - \frac{z^k}{N^k}\binom{N}{k}\right) + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{N}{k}}{N^k}\right)|z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\frac{|z|^k}{N}$$

$$= e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{N}\right)^N$$

Or $\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{|z|}{N}\right)^N = 0$ donc $\lim_{N\to+\infty}\left|e^z - \left(1+\frac{z}{N}\right)^N\right| = 0$ et $\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{z}{N}\right)^N = e^z$

6)a) $y(t) = \left(\frac{b}{a} + y_0\right)e^{at} - \frac{b}{a}$; $y(T) = \left(\frac{b}{a} + y_0\right)e^{aT} - \frac{b}{a}$

b) $y_N = \left(1 + \frac{aT}{N}\right)^N \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$

$\lim_{N\to+\infty} y_N = e^{aT}\left(y_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a} = y(T)$

<u>Partie III</u>

7) a) $y(t) = y_0 + \int_0^t b(u)du$

b) $y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N} b(t_k) = y_{k-1} + \frac{T}{N}\left(b(t_k) + b(t_{k-1})\right)$

$$= y_0 + \frac{T}{N}(b(t_k) + b(t_{k-1}) + \ldots + b(t_0))$$

$y_N = y_0 + \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} b\left(\frac{kT}{N}\right)$ puisque $t_k = \frac{kT}{n}$

Comme $\lim_{N\to+\infty} \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} b\left(\frac{kT}{N}\right) = \int_0^T b(u)du$ (car la somme est une somme de Riemann : on prend b sur le segment [0,T], la subdivision est régulière de pas $\frac{T}{N}$ et sur chaque subdivision on prend l'origine)

donc $\lim_{N\to+\infty} y_N = y_0 + \int_0^T b(u)du = y(T)$

8)a) $y(t) = y_o e^{\int_0^t a(u)du}$ et $y(T) = y_0 e^{\int_0^T a(u)du}$

b) $\left|\frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right)\right| \leq \frac{|T|}{N}\sup_{u\in[0,T]}|a(u)| \leq 1/2$ si N est suffisamment grand.

Par étude de y(x)=ln(1+x)-x et g(x)=ln(1+x)-x+x^2 on obtient l'encadrement

Pour N grand tous les facteurs de p_N sont strictement positifs.

$$\ln(p_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{T}{N} a\left(\frac{kT}{N}\right)\right)$$

$$\frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a\left(\frac{kT}{N}\right) - \frac{T}{2N}\left[\frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a^2\left(\frac{kT}{N}\right)\right] \leq \ln(p_N) \leq \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a\left(\frac{kT}{N}\right)$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a\left(\frac{kT}{N}\right) = \int_0^T a(u)du \text{ (Somme de Riemann)}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a^2\left(\frac{kT}{N}\right) = \int_0^T a^2(u)du \text{ et } \lim_{N\to+\infty} \frac{T^2}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1} a^2\left(\frac{kT}{N}\right) = 0\times\int_0^T a^2(u)du = 0$$

On obtient (par encadrement)

$\lim_{N\to+\infty} \ln(p_N) = \int_0^T a(u)du$ et $\lim_{N\to+\infty} p_N = e^{\int_0^T a(u)du}$

c) $y_N = \left(1+\frac{T}{N}a\left(\frac{(N-1)T}{N}\right)\right)y_{N-1} = \ldots = p_N y_0$

et $\lim_{N\to+\infty} y_N = y_o e^{\int_0^T a(u)du} = y(T)$

9) $L = -\frac{\beta}{\alpha}$ et $u_k + \beta/\alpha = (1+\alpha)\left(u_{k-1}+\beta/\alpha\right) = (1+\alpha)^k\left(u_0+\beta/\alpha\right)$

$u_k = (1+\alpha)^k\left(u_0+\beta/\alpha\right) - \beta/\alpha = \left((1+\alpha)^k - 1\right)\beta/\alpha$

b) $e_o = 0 = u_0$ et si $e_k \le u_k$, $e_{k+1} \le (1+\alpha)e_k + \beta \le (1+\alpha)u_k + \beta = u_{k+1}$

d'où l'inégalité $e_k \le u_k$ pour $k \in \mathrm{N}$

$e_k \le u_k = ((1+\alpha)^k - 1)\beta/\alpha \le (e^{k\alpha}-1)\beta/\alpha$, (puisque $1+\alpha \le e^\alpha$)

10) a) Comme $a,b \in C^1(\Re), y' \in C^1(\Re)$ et $y \in C^2(\Re)$

b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + (t_{k+1}-t_k)y'(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)y''(t)dt \\ &= y(t_k) + \frac{T}{N}[a(t_k)y(t_k)+b(t_k)] + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)y''(t)dt \\ &= (1+\frac{T}{N}a(t_k))y(t_k) + \frac{T}{N}b(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)y''(t)dt \end{aligned}$$

c) Comme $y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N}(a(t_k)y_k + b(t_k))$

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} = (1+\frac{T}{N}a(t_k))(y(t_k)-y_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)y''(t)dt$$

D'où $e_{k+1} = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \le (1+\frac{A|T|}{N})e_k + \frac{M_2T^2}{2N^2}$

d) on en déduit

$$e_N = |y(T)-y_N| \le \frac{M_2T^2}{2N^2}\frac{N}{A|T|}(e^{A|T|}) = \frac{M_2}{2}\frac{|T|}{A}e^{A|T|}\frac{1}{N}$$

D'où $\lim_{N\to+\infty} y_N = y(T)$