Devoir Libre

18 Ev. Euclidiens : Les "must" Classiques

Blague du jour

- Une puce et un labrador discutent :

-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...

- Qu'est-ce qu'un dromadaire ?

Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

Mathématicien du jour

André-Louis Cholesky (1875-1918)

Polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Il est célèbre pour sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, toujours intensément utilisée de nos jours. Durant la Première Guerre mondiale, il participe à l'amélioration d'une cartographie nécessaire à la préparation des tirs. il décède des suites de blessures reçues sur le champ de bataille.

Matrice de Gram.

Soient $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n, et $\text{Gram}(x_1, \ldots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $\left(\overrightarrow{x_i} | \overrightarrow{x_j}\right)$. On pose $\Gamma(x_1, \ldots, x_p) = \det\left(\text{Gram}(x_1, \ldots, x_p)\right)$
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale directe de E, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

① ① Comparer $\text{rg} A$ et $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

② Préciser le type de la matrice A, ainsi que ses coefficients.

③ Montrer que ${}^tAA = Gram(x_1, \ldots, x_p)$.

④ Montrer que $\ker {}^tAA = \ker A$, en déduire que $\text{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \text{rg } Gram(x_1, \ldots, x_p)$.

② ① Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.

② Soit $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $x \in E$.

Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\Gamma(x_1, \ldots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \ldots, x_n)}$.

③ On suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une famille quelconque de E, vérifiant la relation suivante :

$$\forall\ cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$

① Démontrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

② Démontrer que : $\forall\ x, y \in E,\ (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

③ On note G la matrice de Gram de $e_1,\dots,e_n$.
Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

④ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.
Montrer que $\Gamma(u(e_1),\dots,u(e_n)) = (\det u)^2\Gamma(e_1,\dots,e_n)$.

⑤ Soit $A \in matn, p\mathbb{R}$. Montrer que $\det({}^tAA) \geq 0$.

⑥ Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \dfrac{\pi}{4}, (AB, AD) \equiv \dfrac{\pi}{3}, (AC, AD) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

⑦ Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases quelconques de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

⑧ Soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.
Montrer que : $\forall\ \vec{x} \in E, \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}(\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

⑨ Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E, G sa matrice de Gram $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

① Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.

② Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

Décomposition polaire

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \dots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   a. Montrer que $wu = uw$. En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   b. Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i. Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i.
   c. En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in Gl(E)$.
   a. Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
   b. Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$.

Endomorphismes normaux.

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

① Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^{\perp}$ est stable par u.
En déduire que u est diagonalisable dans base orthonormale.
La réciproque est-elle vraie ?

② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
(1) u est normal.
(2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
(3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^*.
(4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.
(5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

③ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.

④ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \iff \mathrm{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

Décomposition de Cholesky, QR.

① **Décomposition de Cholesky :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

① Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall\, i,\ T_{ii} > 0$.

② Application : Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

② **Décomposition QR :**

① Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.

② **Inégalité de Hadamard :** Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs quelconques.
Démontrer que $|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})| \leq \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

$F \neq E$ mais $F^{\perp} = \{0_E\}$.

① Soit E unespace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\to|\to)$, et F un sous-espace vectoriel de E.

① Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (\vec{x}\,|\,\vec{y})$ est continue sur E^2.

② Soit $x \in E$ fixé, montrer que l'application $y \mapsto (\vec{x}\,|\,\vec{y})$ est continue sur E.

③ En déduire que $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$.

④ On suppose que F est dense dans E, montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.
Si de plus $F \neq E$, montrer que F n'admet pas de supplémentaires orthogonal.

② Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

① Montrer que $g \notin F$.

② Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.

③ En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

③ Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$.

① Montrer que φ est continue.

② Montrer que $H = \ker \varphi$ est fermé.

③ Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Rayleigh, Courant Fischer

.

① **Quotient de Rayleigh** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh $R_f(x) = \dfrac{(f(\vec{x}) \mid \vec{x})}{\|\vec{x}\|}$ où $x \neq 0_E$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f.

① Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \lambda_1\|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leq \lambda_n\|\vec{x}\|^2$.

② Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f.

③ Soit $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout i : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.
Montrer que : $\forall\, i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i$.

④ En déduire que le quotient de Rayleigh de f atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.

② **Théorème de Courant-Fischer** Soit E un espace vectoriel euclidien.

① Soit $v \in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $\left(\overrightarrow{v(x)} | \overrightarrow{x}\right) = 0$ pour tout x. Montrer que $v = 0$.

② Soient $u_1,\ldots,u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$, et que $\forall x \in E$, $\left(\overrightarrow{u_1(x)} | \overrightarrow{x}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{u_p(x)} | \overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{x} \,|\, \overrightarrow{x}\right)$.

① Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.

② Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$.

③ Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.