Devoir Libre 19

Réduction simultanée et décomposition de Cholesky

Blague du jour

✒ Une logicienne (spécialiste en logie) vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.
✒ La vie est complexe, elle a une face réelle et une autre imaginaire.

Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)

Mathématicien du jour

Mathématicien danois, il est le fils d'un agriculteur. Il travailla la majeure partie dans le domaine des assurances, c'est ainsi qu'il fonda son entreprise, et il fut le président du conseil danois de l'assurance. Il décéda après avoir été heurté par un vélo.

Enoncé : Extrait CCP 2011, MP

Dans ce problème, on note pour n entier naturel non nul :

① S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

② S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

③ S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels positifs, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

① **Question préliminaire**

On rappelle qu'une matrice S appartient à S_n^+, si S appartient à S_n et si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$. Démontrer qu'une matrice S de S_n est élément de S_n^+ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

Partie I

② Soit $S \in S_n^+$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n}\text{trace}\, S$.

③ Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

① Démontrer que ${}^tMM \in S_n^+$.

② Si $M = (m_{i,j})$, en déduire l'inégalité $(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=i}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2\right)^n$.

Partie II : héorème de réduction simultanée

④ On se donne deux matrices $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, dans cette base, A est la matrice d'un produit scalaire φ. On note l'espace euclidien $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E et R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

① Justifier que $I_n = {}^tRAR$.

② On note $C = {}^tRBR$, justifier qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que ${}^tQCQ = D$.

③ Déterminer, en fonction des matrices R et Q, une matrice inversible P telle que :
$A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ (théorème de réduction simultanée).

④ Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer qu'une matrice inversible P telle que la matrice ${}^tPBP$ soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.
On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice B.

⑤ Démontrer l'inégalité « $\det(A+B) \geq \det A + \det B$ » dans les deux cas suivants :

① $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^{+}$, en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous les $\lambda_i \geq 0$, $\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

② $A \in S_n^{+}$ et $B \in S_n^{+}$, en démontrant d'abord que $A + B \in S_n^{+}$ et en considérant les cas où les matrices sont dans S_n^{+} sans être dans S_n^{++}.

⑥ Soient A et B deux matrices de S_n^{++} et $t \in [0,1]$. On note P une matrice inversible et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.

① Exprimer $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det P$, t et les λ_i.

② En utilisant la fonction ln, démontrer que, pour tout i entier compris entre 1 et n, $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$.

③ Démontrer que $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.

⑦ Si A est une matrice de S_n^{++} et B une matrice de S_n^{+}, on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$) le résultat suivant qui est admis :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

① Démontrer que S_n^{++} est dense dans S_n^{+}.

② Démontrer l'inégalité ci-dessus pour A et B deux matrices de S_n^{+}.

Partie III : Théorème de Choleski

⑧ Si A est une matrice de S_n^{++}, il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T, vérifiant $A = {}^tTT$ (décomposition de Choleski).
On ne demande pas de prouver ce résultat.

① On se propose de démontrer que cette matrice T est unique.

Si on pose $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, démontrer que $T_1T_2^{-1} = I_n$ et conclure.

On pourra admettre que, si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathcal{T}, \cdot)$ est un groupe.

② Exemple : si $A = (a_{i,j})$, où pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n, $a_{i,j} = \min(i, j)$, donner la décomposition de Choleski de la matrice A.

On ne demande pas de vérifier que A est une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}$.

⑨ Un peu d'informatique

Pour une matrice A de $\mathcal{S}_3^{++}$, écrire un algorithme en français permettant de trouver la matrice T de la décomposition de Choleski.

Entrer cet algorithme dans la calculatrice (on ne demande pas le programme sur la copie) puis, pour chacun des cas suivants, donner la matrice T :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}.$$

⑩ Inégalité d'Hadamard

① Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}$, démontrer que $\det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

② Application : démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (a_{i,j})$,

$$|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

FIN FIN

Á la prochaine