Concours Communs Polytechniques - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'algèbre- Filière MP

Commutant d'une matrice, inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Corrigé par M.TARQI `http://alkendy.x10.mx`

Exercice

Commutant d'une matrice

1. Il suffit de montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en effet, $C(A)$ est non vide puisqu'il contient A et si M et N sont dans $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$A(M+\lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M+\lambda N)A,$$

et donc $M + \lambda N$ est dans $C(A)$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = -(x-3)(x-2)^2$, donc on peut trigonaliser la matrice A. Cherchons d'abord les sous-espaces propres associés à 3 et 2. Après calculs on trouve $E_3 = \text{Vect}(1,1,1) = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(4,3,4) = \text{Vect}(v_2)$. On choisit alors un vecteur v_3 quelconque vérifiant les conditions suivantes : les vecteurs (v_1, v_2, v_3) sont linéairement indépendants et $Av_3 - 2v_3 = v_2$.
Posons $v_3 = (x, y, z)$, alors :

$$Av_3 - 2v_3 = v_2 \iff \begin{pmatrix} -x+4y-2z=4 \\ 4y-3z=3 \end{pmatrix}$$

Choisissons, par exemple, $v_3 = (-2, 0, -1)$.
La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est bien libre et si $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3)) alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$.

3. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in C(T)$ si et seulement si $AM = MA$ ou encore

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2a'+q'' & 2b'+b'' & 3c'+c'' \\ 2a'' & 2b'' & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b+2c \\ 3a' & 2b' & b'+2c' \\ 3a'' & 2b'' & b''+2c'' \end{pmatrix}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c'' & c' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c''\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $M \in \text{Vect}(J, K, L)$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Réciproquement, les matrices J, K, L sont linéairement indépendantes et sont dans $C(T)$, donc $C(T) = \text{Vect}(J, K, L)$ et par suite $\dim C(A) = 3$.

4. (a) Il est clair que l'application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $P^{-1}MP = 0$ si et seulement si $M = 0$, donc l'application $M \longmapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'image de $C(A)$ n'est autre que $C(T)$ et par suite $\dim C(A) = \dim C(T) = 3$.
   (b) Non, si oui, la matrice A serait diagonalisable.
   (c) Il est clair que $\mathrm{Vect}(I, A, A^2) \subset C(A)$ et toute relation de la forme $aI+bA+cA^2 = 0$ entraîne $a = b = c = 0$ (d'après 5.(b)), donc la famille $\{I, A, A^2\}$ est libre et comme $\dim C(A) = 3$, alors $C(A) = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$
   (d) Il est clair que tout polynôme en A est dans $C(A)$. Inversement soit $M = P(A)$ un polynôme en A et soit R le reste de la division euclidienne de P par χ_A, d'après le théorème de Cayly-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ et donc $M = R(A)$, avec $\deg R \leq 2$, ainsi

$$C(A) = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Le résultat n'est vrai en général, il suffit considérer une matrice nilpotente d'indice 2.

Problème

Inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

1. *Question préliminaire* S étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisabe. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A, puisque $X \neq 0$, ${}^tXX > 0$, d'où :

$$^tXAX = \lambda^tXX$$

ou encore

$$\lambda = \frac{^tXAX}{^tXX} \geq 0.$$

Inversement si les valeurs propres de A sont positives, alors, dans une base de diagonalisation de A :

$$^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

où les x_i désignent les composantes de X dans cette base.

Parti I

2. Soit $S \in S_n^+$ et soit $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de A, d'après 1. $\mathrm{Sp}(A) \subset R^+$ et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

inégalité qui s'écrit encore sous la forme

$$\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n}\mathrm{trace}S.$$

3. (a) Il est clair que ${}^t({}^tMM) ={}^t MM$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$^tX^tMMX =^t (MX)(MX) \geq 0,$$

donc ${}^tMM \in S_n^+$.
   (b) Posons ${}^tMM = (c_{ij})$. On a $c_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{ki}m_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{ki}^2$, donc

$$\mathrm{trace}(^tMM) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2.$$

L'inégalité de la question 2. appliquée à ${}^tMM$ entraîne $\sqrt[n]{\det({}^tMM)} \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2$ et comme $\det({}^tM) = \det M$, alors

$$(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2\right)^n .$$

PARTIE II : THÉORÈME DE RÉDUCTION SIMULTANÉE

4. (a) La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est I_n puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E et dans la base canonique est $\mathcal{B}$, donc d'après la formule de changements de bases, on a $I_n ={}^t RAR$.
   (b) C étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $C = QDQ^{-1} = QD^tQ$ ou encore $D ={}^t QCQ$.
   (c) La relation $C ={}^t RBR$ est équivalent encore à

$$B = ({}^tR)^{-1}CR^{-1} ={}^t (R^{-1})CR^{-1} ={}^t (RQ)^{-1}D(RQ)^{-1}$$

   et la relation $I_n ={}^t RAR$ est équivalent à

$$A ={}^t (R^{-1})R^{-1} ={}^t (RQ)^{-1}(RQ)^{-1},$$

   il suffit donc de prendre $P = (RQ)^{-1}$.
   (d) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tPBP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cependant la matrice P n'est pas orthogonale.
5. (a) Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$. On a $A + B ={}^t P(I_n + D)P$ et donc

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= (\det P)^2 \det(I_n + D) \\
&= (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \\
&\geq (\det P)^2 \left(1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right) \\
&= (\det P)^2 + \det({}^tP)\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \det P = \det A + \det B
\end{aligned}$$

   (b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A+B)X ={}^t XAX +{}^t XBX \geq 0$ et donc $A + B \in S_n^+$, ainsi $\det(A+B) \geq 0$.
   Si $A \in S_n^{++}$ ou $B \in S_n^{++}$, alors l'inégalité est toujours vérifie. Maintenant soit A et B dans $S_n^+ \backslash S_n^{++}$, alors $\det A = \det B = 0$ et dans ce cas aussi on a $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.
6. (a) On a $tA + (1-t)B ={}^t P(tI_n + (1-t)D)P$ et donc

$$\det(tA + (1-t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n}\left(t + (1-t)\lambda_i\right).$$

   (b) La fonction $\ln$ étant concave, donc pour tout i, $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geq t\ln 1 + (1-t)\ln\lambda_i$ et donc

$$\ln(\lambda_i^{1-t}) \leq \ln(t + (1-t)\lambda_i)$$

   et par conséquent

$$t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}.$$

(c) D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned} \det(tA+(1-t)B) &= (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n}(t+(1-t)\lambda_i) \\ &\geq (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1-t} \\ &\geq (\det P)^{2t} (\det P)^{2(1-t)} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1-t} \\ &= (\det A)^t (\det B)^{1-t} \end{aligned}$$

7. (a) Pour $S \in S_n^{+}$, on définie la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ par $S_p = S + \dfrac{1}{p} I_n$ qui tend vers S quand p tend vers l'infini, avec $S_p \in S_n^{++}$ car ${}^tXS_pX = {}^t XSX + \dfrac{1}{p}{}^t XX > 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$.

   (b) Soient $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux suites de S_n^{++} telles que $\lim\limits_{p\to\infty} A_p = A$ et $\lim\limits_{p\to\infty} B_p = B$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\det(A_p + B_p))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A_p)^{\frac{1}{n}} + (\det B_p)^{\frac{1}{n}}$$

   et comme l'application $\det$ est continue, alors on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$$

PARTIE III : THÉORÈME DE CHOLESKI

8. (a) L'égalité ${}^tT_1T_1 = {}^t T_2T_2$ entraîne $T_1T_2^{-1} = {}^t (T_2T^{-1})$ et comme $\mathcal{T}$ est un groupe, alors $T_1T_2^{-1}$ est triangulaire supérieure et inférieure à la fois, donc nécessairement $T_1T_2^{-1} = I_n$, donc $T_2 = T_1$ est par conséquent T est unique.

   (b) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^tTT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = A$

Remarque : Notons q la forme quadratique canoniquement associée à A. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix};$$

A est somme des matrices A_r définie par $A_r(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, pour tout $1 \leq i,j \leq n$ et $1 \leq r \leq n$. On en déduit la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=i}^{n} x_p \right)^2 .$$

Les formes linéaires du membre de droite étant linéairement indépendantes, on peut affirmer que q est définie positive. Autrement dit, la matrice $A \in S_n^{++}$

9. *Un peu d'informatique* La matrice T est obtenue par la méthode qui consiste à résoudre le système $n^2 \times n^2$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}t_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{ik}t_{jk}, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

en calculant d'abord la première colonne de T (correspondant à $i = 1$ dans le système) :

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\ t_{21} = \frac{a_{12}}{t_{11}}, \\ \vdots \\ t_{n1} = \frac{a_{1n}}{t_{11}} \end{cases}$$

puis la seconde colonne (en fixant $i = 2$), et ainsi de suite jusqu'à déterminer t_{nn}.

10. *Inégalité d'Hadamard*

(a) Puisque $S \in S_n^{++}$, alors ${}^tE_iSE_i = a_{ii} >$ (où E_i désigne la matrice du ième vecteur de la base canonique), donc on peut définir la matrice $B = DSD$ avec

$$D = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}, ..., \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}),$$

il est clair que $B \in S_n^{++}$ et donc

$$\sqrt[n]{\det S(\det D)^2} = \sqrt[n]{\det B} \leq \frac{1}{n}\text{trace}(B),$$

d'où $\det S(\det D)^2 \leq 1$ car $b_{ii} = 1$ et donc $\det S \leq \dfrac{1}{(\det B)^2} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(b) On a $\det({}^tMM) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} c_{i,i}$ où $c_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{i,k}a_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$, mais :

$$\det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2,$$

on a donc $|\det(M)| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (inégalité d'Hadamard).

●●●●●●●●●●●●●