

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir libre N°12

Méthode QR et applications

MP-CPGE RABAT

Vendredi 7 Janvier 2011

Blague du jour

- Une puce et un labrador discutent :
 - Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
 - La puce : La deuxième chienne, et toi ?
 - Moi, canal puce ...
 - Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
- Réponse : c'est un chameau qui bosse double !



Alston Scott Householder (1904 -1993)

Mathématicien américain spécialisé en mathématiques appliquées à la biologie et en analyse numérique. On lui doit les transformations de Householder et les méthodes de Householder pour la résolution d'équations algébriques ou linéaires. Il a contribué au développement de plusieurs revues mathématiques, il a été président de l'American Mathematical Society

Mathématicien du jour

Objectif : Le but de ce devoir libre est de présenter différentes méthodes pour obtenir la factorisation QR très utile pour la résolution exacte ou approchée d'un système linéaire $Ax = b$ et une application pour la résolution du problème des moindres carrés.

1 Factorisation QR.

On se propose dans cette partie de démontrer puis de donner des application du théorème suivant :

Théorème : Toute matrice carrée A se décompose sous la forme $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique si on impose le signe des termes diagonaux de Q , quand A est inversible.

1.1 Unicité.

Soit Q, Q' deux matrices orthogonales et R, R' deux matrices triangulaires supérieures telles $QR = Q'R' = A$ inversibles.

1 → Dire pourquoi QQ'^{-1} est orthogonale, triangulaire supérieure. En déduire qu'elle est diagonale.

2 → Que peut-on dire de ses termes diagonaux.

4 → Écrire un programme qui décrit la méthode de Givens.

c Méthode de Householder.

Définition : On appelle matrice de Householder, toute matrice $H(v)$ de la forme :

$$H(v) = I_n - \frac{v^t v}{\|v\|^2} \text{ où } v \text{ est un vecteur colonne.}$$

1 → Montrer que les matrices de Householder sont des matrices orthogonales.

2 → Soit $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, on se propose de montrer dans cette question qu'il existent deux matrices de Householder $H(v_1)$ et $H(v_2)$ telles que les $n - 1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. On note par $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

a 1^{er} cas : $\sum_{i=2}^n |a_i| \neq 0$. On pose $v_1 = a + \|a\| e_1$ et $v_2 = a - \|a\| e_2$.

i Montrer que v_1 et v_2 sont différents et distincts.

ii Calculer ${}^t e_i H(v_1) a$ et ${}^t e_i H(v_2) a$.

iii En déduire le résultat.

b 2^{ème} cas : $\sum_{i=2}^n |a_i| = 0$.

i Montrer que $H(a_1 + \|a\| e_1) a = \|a\| e_1$.

ii En déduire le résultat.

3 → On note par a la 1^{ère} colonne de A , soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que les $n - 1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. Quelle est la forme de la matrice HA .

4 → Si A est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ B \\ \end{array}$ Dire comment annuler les coefficients en dessous de la diagonale dans la 2^{ème} colonne de A .

5 → Dire comment trouver les matrices Q et R .

2 Méthode des moindres carrés

Problème : Quel est la droite la plus proche à trois points donnés. En général quel est le polynôme de degré m (degré fixe), dont la courbe est la plus proche à n points donnés.

Position du problème : Soit m, n deux entiers naturels donnés et $M_i = (x_i, y_i)$, $(1 \leq i \leq n)$ n points donnés. Comment choisir les coefficients du polynôme de degré m , $P(X) = \sum_{k=1}^m a_k X^{k-1}$ pour que la somme $\sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2$ soit minimale.

1 → 1^{er} cas : $k = n$.

a Donner l'écriture matricielle du système $\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution unique.

c Quel est cette solution.

2 2ème cas : $k \leq n$.

a Écrire $\sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2$ sous la forme $\|Ax - b\|^2$ où A une matrice et x, b deux vecteurs colonnes à déterminer.

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution au point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}f}(a) = \vec{0}$ où $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

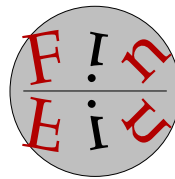
c En déduire que a est solution du système ${}^tAAx = {}^t b$

d Dire pourquoi ce dernier système admet une solution.

e Dire comment appliquer la factorisation QR pour la résolution de de dernier système.

f Application : Quelle est la droite du plan la plus proche aux trois points $A(0,0), B(1,0)$ et $C(0,1)$.

3 3ème cas : $k \geq n$. Y-a-t-il des solutions au problème des moindres carrés dans ce cas.



À la prochaine