.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir libre N°12

Mèthode QR et applications

MP-CPGE RABAT

Vendredi 7 Janvier 2011

Blague du jour

• Une puce et un labrador discutent :
-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

Mathématicien du jour

Alston Scott Householder (1904 -1993)

Mathématicien américain specializé en mathématiques appliquées à la biologie et en analyse numérique. On lui doit les transformations de Householder et les méthodes de Householder pour la résolution d'équations algébriques ou linéaires. Il a contribué au développement de plusieurs revues mathématiques, il a été président de l'American Mathematical Society

Objectif : Le but de ce devoir libre est de présenter différentes méthodes pour obtenir la factorisation $\mathbf{QR}$ très utile pour la résolution exacte ou approchée d'un système linéaire $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ et une application pour la résolution du problème des moindres carrées.

1 Factorisation QR.

On se propose dans cette partie de démontrer puis de donner des application du théorème suivant :

Théorème : Toute matrice carrée $\mathbf{A}$ se décompose sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ où $\mathbf{Q}$ est une matrice orthogonale et $\mathbf{R}$ une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique si on impose le signe des termes diagonaux de $\mathbf{Q}$, quand $\mathbf{A}$ est inversible.

1.1 Unicité.

Soit $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ deux matrices orthogonales et $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ deux matrices triangulaires supérieures telles $\mathbf{QR} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}' = \mathbf{A}$ inversibles.

1 Dire pourquoi $\mathbf{Q}\mathbf{Q}'^{-1}$ est orthogonale, triangulaire supérieure. En déduire qu'elle est diagonale.

2 Que peut-on dire de ses termes diagonaux.

3 Conclure.

1.2 Existence

a Méthode de Gram-Schmidt

Soit A une matrice carré d'ordre n inversible. On suppose $A = QR$ avec Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure carrées d'ordre n. Soit A_j, Q_j et R_j les colonnes respectives des matrices A, Q et R. On note par $r_{i,j}$ les coefficients de la matrice R, avec $r_{ii} \geq 0$.

1 Montrer que : $\begin{cases} A_1 = r_{11}Q_1 \\ A_2 = r_{12}Q_1 + r_{22}Q_2 \\ \vdots \\ A_n = r_{1n}Q_1 + r_{2n}Q_2 + \cdots + r_{nn}Q_n \end{cases}$

2 Dire comment trouver les coefficients r_{ij} et les colonnes Q_i.
Indication : les colonnes Q_i forment un base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$.

3 Montrer que Vect$(A_1, \cdots, A_k)$ =Vect$(Q_1, \cdots, Q_k)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$
Que représente la famille $(Q_1, \cdots, Q_n)$ pour la famille $(A_1, \cdots, A_n)$, et proposer une une méthode de calcul simple pour trouver les matrices Q et R.

4 Que se passe-t-il quand la matrice A n'est pas inversible.

b Méthode de Givens.

Idée : Multiplier $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ successivement par des matrices orthogonales pour faire apparaître des zéros en dessous de la diagonale.
Soit i, j deux indices fixes. On pose :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ji} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ij} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& c_{ij} &&& s_{ij} &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& -s_{ij} &&& c_{ij} &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$

1 Montrer que Q_1 est la matrice d'une rotation.

2 Montrer que le coefficient d'indice (j, i) de Q_1A est nul.

3 Dire comment trouver les matrices Q et R.

4 Écrire un programme qui décrit la méthode de Givens.

C Méthode de Householder.

Définition : On appelle matrice de Householder, toute matrice $H(v)$ de la forme :
$H(v) = I_n - \dfrac{v^t v}{\|v\|^2}$ où v est un vecteur colonne.

1 Montrer que les matrices de Householder sont des matrices orthogonales.

2 Soit $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, on se propose de montrer dans cette question qu'il existent deux matrices de Householder $H(v_1)$ et $H(v_2)$ telles que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. On note par $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a 1èr cas : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| \neq 0$. On pose $v_1 = a + \|a\|\, e_1$ et $v_2 = a - \|a\|\, e_2$.

i Montrer que v_1 et v_2 sont différents et distincts.

ii Calculer ${}^t e_i H(v_1)a$ et ${}^t e_i H(v_2)a$.

iii En déduire le résultat.

b 2ème cas : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| + 0$.

i Montrer que $H(a_1 + \|a\|\, e_1)a = \|a\|\, e_1$.

ii En déduire le résultat.

3 On note par a la 1ère colonne de A, soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. Quelle est la forme de la matrice HA.

4 Si A est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ Dire comment annuler les coefficients en dessous de la diagonale dans la 2ème colonne de A.

5 Dire comment trouver les matrices Q et R.

2 Méthode des moindres carrés

Problème : Quel est la droite la plus proche à trois points donnés. En général quel est le polynôme de degré m (degré fixe), dont la courbe est la plus proche à n points donnés.

Position du problème : Soit m, n deux entiers naturels donnés et $M_i = (x_i, y_i)$, $(1 \leq i \leq n)$ n points donnés. Comment choisir les coefficients du polynôme de degré m, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k X^{k-1}$ pour que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ soit minimale.

1 1èr cas : $k = n$.

a Donner l'écriture matricielle du système $\left\{\begin{array}{rcl} P(x_1) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ P(x_n) & = & y_n \end{array}\right.$

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution unique.

c Quel est cette solution.

2 2ème cas : $k \leq n$.

a Écrire $\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ sous la forme $\|Ax - b\|^2$ où A une matrice et x, b deux vecteurs colonnes à déterminer.

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution au point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \vec{0}$ où $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

c En déduire que a est solution du système ${}^tAAx = {}^t b$

d Dire pourquoi ce dernier système admet une solution.

e Dire comment appliquer la factorisation QR pour la résolution de de dernier système.

f Application : Quelle est la droite du plan la plus proche aux trois points $A(0,0), B(1,0)$ et $C(0,1)$.

3 3ème cas : $k \geq n$. Y-a-t-il des solutions au problème des moindres carrés dans ce cas.

À la prochaine