

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre
Pseudo crochet de Lie

Corrigé Pr. Mamouni, CPGE Rabat

1^{ere} Partie

- ① Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; montrer que $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(C) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \det({}^t A - \lambda I_n) = 0 \iff \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}({}^t C)$. NB $\det(M) = \det({}^t M) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ② Il est clair que $\Phi_{A,B}(X + \lambda Y) = \Phi_{A,B}(X) + \lambda \Phi_{A,B}(Y)$.
- ③ ① En notant les coefficients de la matrice $V^t W$ par $(V^t W)_{i,j}$ on a $(V^t W)_{i,j} = v_i w_j$. D'autre part $V \neq 0$ car vecteur propre, donc $\exists 1 \leq i \leq n$ tel que $v_i \neq 0$, de même $\exists 1 \leq j \leq n$ tel que $w_j \neq 0$, d'où $\exists 1 \leq i, j \leq n$ tel que $(V^t W)_{i,j} = v_i w_j \neq 0$ et donc la matrice $V^t W$ est non nulle.
- ② On a $AV = av, {}^t BW = bW$ donc $AV = av, {}^t WB = b^t W$
 $\Phi_{A,B}(V^t W) = AV^t W + V^t WB = (a + b)V^t W$, or $V^t W \neq 0$ donc $V^t W$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a + b$.
- ④ ① Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
 Le résultat est évidemment vrai pour $k = 0$. NB $M^0 =$

$I_n \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons maintenant $A^k Y = Y(\lambda I_n - B)^k$ et montrons que $A^{k+1} Y = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$. On a d'abord $\Phi_{A,B} = \lambda Y$, donc $AY + YB = \lambda Y$ et on trouve $AY = Y(\lambda I_n - B)$. Donc $A^{k+1} Y = AA^k Y = AY(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$.

- ② Soit un polynôme P , à coefficients dans \mathbb{K} , et de degré d , donc $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et donc $P(A)Y = \sum_{k=0}^d a_k A^k Y =$

$$\sum_{k=0}^d a_k Y(\lambda I_n - B)^k = Y \sum_{k=0}^d a_k (\lambda I_n - B)^k = YP(\lambda I_n - B).$$

- ③ D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$ donc $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ notons $S = P_A(\lambda I_n - B)$ i.e. S était inversible $YS = 0 \implies YSS^{-1} = Y = 0$ ce qui est impossible puisque Y est un vecteur propre, donc la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
 Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible.
 Or $P_A(\lambda I_n - B) = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} ((\lambda - \mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $((\lambda - \mu)I_n -$

$B)^{\beta\mu}$ n'est pas inversible et donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\lambda - \mu)I_n - B$ n'est pas inversible. En prenant $a = \mu$ on peut en déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.

⑤ Si le polynôme P_A est scindé sur \mathbb{K} alors :
 $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \implies \exists a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible c'est à dire $\det((\lambda - a)I_n - B) = 0$ et donc $\lambda - a \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ donc $\exists b \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda - a = b$ d'où $\lambda = a + b$ or $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ d'où $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \subset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$.

Inversement, d'après la question 3.b on voit que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \supset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$. D'où l'égalité.

⑥ Supposons que $\sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite

par un Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque d'où $\sum_{i=1}^p a_i Y_i = 0$

où $a_i = {}^t Z_i Z_j$, or (Y_1, \dots, Y_p) une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^t Z_j Z_j = \|Z_j\|_2 = 0$ et donc $Z_j = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$.

La réciproque est bien évidente.

⑦ La famille $(U_i^t W_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or il est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \implies \sum_{i=1}^n U_i^t Z_i = 0$ où $Z_i =$

$\sum_{j=1}^n a_{i,j} W_j$ d'après la question précédente $Z_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} W_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ or $(W_j)_{1 \leq j \leq n}$ est aussi libre donc $a_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$.

⑧ ① $\forall (M = (m_{i,j}), N, P) \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $\langle M + \lambda N, P \rangle = \text{Tr}({}^t(MP + \lambda NP)) = \text{Tr}({}^t MP) + \lambda \text{Tr}({}^t NP) = \langle M, P \rangle + \lambda \langle N, P \rangle$.
 $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t MN) = \text{Tr}({}^t ({}^t MN)) = \text{Tr}({}^t NM) = \langle N, M \rangle$.
 $\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^t MM)$ = la somme des termes diagonaux de la matrice ${}^t MM$ or ces termes diagonaux sont $\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$

d'où $\langle M, M \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2 \geq 0$.

$\langle M, M \rangle = 0 \implies \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2 = 0 \implies$ les $m_{i,j}$ sont tous

nuls ce qui implique que $M = 0$ et ainsi les propriétés du produit scalaire sont tous vérifiées.

② Question de cours à la portée de tous.

③ Pour montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$ il faut montrer que $\langle \Phi_{A,B}(X), Y \rangle = \langle X, \Phi_{A,B}(Y) \rangle$ *quad* $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $\langle AX, Y \rangle + \langle XB, Y \rangle = \langle X, AY \rangle + \langle X, YB \rangle$, or $\langle AX, Y \rangle = \text{Tr}({}^t X^t AY) = \text{Tr}({}^t XAY) = \langle X, AY \rangle$ de même on montre que $\langle XB, Y \rangle = \langle X, YB \rangle$.

2^{eme} Partie

- ① Soit λ valeur propre de S et X un vecteur propre associé, donc $SX = \lambda X$ d'où $0 < {}^t X S X = \lambda \|X\|_2^2$ or $X \neq 0$ car vecteur propre donc $\|X\|_2^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$.
- ② les valeurs propres Φ_S sont de la forme $\lambda + \mu$ où λ, μ des valeurs propres de S donc strictement positifs, ainsi les valeurs propres Φ_S sont strictement positifs or Φ_S est diagonalisable dans une base orthogonale donc est Φ_S définie positive.
- ③ Supposons $\Phi_S(X)$ symétrique donc ${}^t X S + S {}^t X = SX + XS$ d'où $\Phi_S({}^t X - X) = ({}^t X - X)S + S({}^t X - X) = 0$ or Φ_S inversible car définie positive donc ${}^t X - X = 0$ et donc X symétrique. La réciproque est bien plus facile.
- ④ ① En prenant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $a = {}^t X A X > 0$, en plus A définie positive donc $\det(A) = ac - b^2 > 0$.
- ② ${}^t U A U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + y^2 \frac{ac - b^2}{a^2} \right) > 0$ alors A est définie positive.
- ③ $\Phi_A(X_\lambda) = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}$, $\det \Phi_A(X_\lambda) = -\lambda^2 b^2 + \lambda(4ac - 2b^2) - b^2 \rightarrow -\beta$ si $\lambda \rightarrow +\beta$ donc $\det \Phi_A(X_\lambda) < 0$ à partir d'un certain rang et dans ce cas $\Phi_A(X_\lambda)$ ne peut pas être définie positive.
- ⑤ Parce que S diagonalisable dans une base orthogonale, puisque définie positive.

- ⑥ ① $\Phi_D(Y) = DY + YD = P^{-1} S P P^{-1} X P + P^{-1} X P P^{-1} S P = P^{-1} \Phi_S(X) P = P^{-1} M P = N$.
D'autre part, tout calcul matriciel fait on trouve $DY + YD = (\lambda_i y_{i,j} \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq n}$
or $DY + YD = \Phi_D(Y) = N = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'où l'égalité : $y_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}$.
- ② $P^{-1} = {}^t P$ car P matrice orthogonale donc $N = {}^t P M P$ d'où ${}^t N = {}^t P {}^t M P = {}^t P M P$ car M symétrique. En plus soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t X N X = (PX) M (PX) > 0$ car M définie positive.
- ③ - Le calcul matriciel montre que ${}^t U Y U = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i y_{i,j} u_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.
- Soit $\alpha > 0$ et $0 < x < 1$ on a $\int_x^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1-x^\alpha}{\alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ (finie) quand $x \rightarrow 0^+$; ce qui montre que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.
- Le calcul matriciel donne ${}^t U(s) N U(s) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s^{\lambda_i + \lambda_j - 1} n_{i,j} u_i u_j$ est intégrable en tant que somme finie de fonctions intégrables les $\lambda_i + \lambda_j$ joueront le rôle de α dans la question précédente.
- $\int_0^1 ({}^t U(s) N U(s)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j = {}^t U Y U$ or N symétrique définie

positive donc ${}^tU(s)NU(s) > 0$ car $U(s) \neq 0$
 en particulier $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s))ds = {}^tUYU > 0$.

- ④ On a $X = PY^tP$, soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tUXU = {}^t(PU)Y({}^tPU) > 0$ car la matrice Y est définie positive la matrice X est définie positive. D'autre part $M = \Phi_S(X)$ est symétrique donc X aussi d'après la question 3. de la 2ème partie.

3^{eme} Partie

- ① ① Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X \in \text{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX = XA \iff$
 $(\mu_1 - \mu_2)c = (\mu_1 - \mu_2)b = 0$
 $\iff b = c = 0 \iff X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; et donc
 $\dim\text{Ker}\Phi_{A,-A} = 2$.
- ② Soit $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, le calcul matriciel donne encore une fois
 $AX = (\lambda_i x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $XA = (\lambda_j x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, en particulier
 $X \in \text{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX - XA = 0 \iff (\lambda_i - \lambda_j)x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$
 $\iff x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ tel que $i \neq j \iff X$ est une matrice diagonale, donc $\text{Ker}\Phi_{A,-A}$ est formé par les matrices diagonale et sa dimension est égale à n .
- ② ① Résultat très classique .
- ② Soit P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = P^{-1}DP$, $X \in \text{Ker}\Phi_{A,-A} \iff$
 $AX = XA \iff P^{-1}DPX = XP^{-1}DP \iff$

$DPXP^{-1} = PXP^{-1}D \iff PXP^{-1} \in \text{Ker}\Phi_{D,-D} \iff$
 $X \in P^{-1}\text{Ker}\Phi_{D,-D}P$, d'où $\text{Ker}\Phi_{A,-A} = P^{-1}\text{Ker}\Phi_{D,-D}P$
 est isomorphe à $\text{Ker}\Phi_{D,-D}$ à l'aide de l'isomorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ donc sont de même dimension or D diagonale donc $\dim\text{Ker}\Phi_{D,-D} = n$ d'où $\dim\text{Ker}\Phi_{A,-A} = n$ aussi .

- ③ ① L'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car linéaire définie un espace vectoriel de dimension finie.
- ② L'application $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car somme et produit des applications $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto a_{i,j}$ qui sont continues car linéaires.

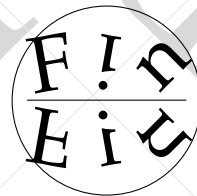
- ④ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc trigonalisable, il existe donc Q inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire telles que

$A = Q^{-1}TQ$ où λ_i un valeur propre de M qui se répètent q fois et $\varepsilon = \min_{\lambda_j \neq \lambda_i} |\lambda_j - \lambda_i|$ il est clair que $\lambda_i + \varepsilon \neq \lambda_j$ donc en remplaçant dans T , λ_i par $\lambda_i + \varepsilon$ alors dans T la valeur propre λ_i ne va se répéter que $q - 1$ fois, on répète l'itération jusqu'à ce qu'elle ne se répète plus. Et on fait pareil pour les autres valeurs propres et on obtient une matrice triangulaire T_ε dont toutes les valeurs propres sont deux à deux distinctes et qui en plus tend vers T quand ε tend vers 0 (quitte à diviser ε par n et tendre n vers $+\infty$). Ainsi T_ε est diagonalisable donc $Q^{-1}T_\varepsilon Q$ aussi, d'autre part $Q^{-1}T_\varepsilon Q \rightarrow Q^{-1}TQ = A$, d'où la densité.

- ⑤ ① Pour montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que son complémentaire $\mathcal{F}_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{rg}(C) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Notons φ_q l'application $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq q})$. $C \in \mathcal{F}_r \iff \forall q \geq r \varphi_q(C) = 0$ et donc $\mathcal{F}_r = \bigcup_{q=r}^n \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \varphi_q(C) = 0\}$ est réunion finies d'ensembles fermés, car φ_q continue, donc fermé.
- ② Si $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A avec les notations de la question précédente

$A_p \in \mathcal{F}_s \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ qui est fermé donc $A = \lim A_p \in \mathcal{F}_s$.
D'où le rang de A est inférieur ou égal à s .

- ⑥ Soit un matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et (A_p) une suite de matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, convergente vers A , (cette suite existe d'après la question 4.). d'autre part l'application $M \mapsto \Phi_{M,M}$ est continue donc $\Phi_{A_p,-A_p}$ converge vers $\Phi_{A,-A}$. Notons $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s$ donc $s = n^2 - \dim \text{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p})$ (d'après la formule du rang), et d'après la question 2.b. $\dim \text{Ker}(\Phi_{A_p,-A_p}) = n$ donc $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s = n^2 - n$ et enfin d'après la question 5.b. $\text{rg}(\Phi_{A,-A}) \geq n^2 - n$, en utilisant encore une fois la formule du rang, mais cette fois pour $\Phi_{A,-A}$ on obtient que la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .



À la prochaine