

F30B

MAMOUNI MY ISMAIL



Devoir libre N°13 (source : Banque PT-2006)

Méthode LU et applications

MP-CPGE RABAT

Epreuve de Mathématiques A

Lundi 10 Janvier 2011

Durée 4 h

Blague du jour

Un mathématicien, un physicien et un biologiste sont dans un train au Maroc. Par la fenêtre, ils aperçoivent un mouton noir.

-Comme c'est intéressant, s'exclame le biologiste, au Maroc, les moutons sont noirs !?!

- On ne peut pas affirmer ça, réplique le physicien. Toutefois, il existe au moins un mouton noir au Maroc.

- Allons, allons, faut pas être sur à ce point, continue le mathématicien, la seule chose que l'on puisse affirmer, c'est qu'au Maroc il existe au moins un mouton, dont au moins un coté du mouton est noir!



Erhard Schmidt (1876-1959)

Mathématicien allemand né à Dorpat, en Allemagne (aujourd'hui Tartu, en Estonie).

Avec David Hilbert, il est considéré comme l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle abstraite moderne. Il était étudiant de Schwarz et fût encadré par Hilbert pour son doctorat. Ses travaux de recherche portaient surtout sur les équations intégrales et sur les espaces de Hilbert, à la topologie et inégalités isopérimétriques vers la fin de sa vie. Notons enfin que Laplace avait le procédé de Gram-Schmidt bien avant que ces derniers le fassent

Mathématicien du jour

sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le problème est composé de 3 parties totalement indépendantes.

Pour tout entier naturel n , nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n .

Nous identifierons dans tout ce problème un vecteur de \mathbb{R}^n avec la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique.

Préliminaires

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique.
2. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale.

3. Soient p, q, m, n des entiers naturels strictement positifs.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont deux matrices à coefficients réels,
- (a) A quelle condition sur p, q, m, n le produit matriciel AB est-il possible ?
 - (b) Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
 - (c) Si on note c_{ij} le coefficient générique de la matrice AB , donner son expression en fonction des coefficients des matrices A et B .

Partie I

Dans cette partie, on considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les déterminants de L et A .
2. Montrer que les matrices L et A sont inversibles.
Calculer l'inverse de L .
3. Déterminer une matrice U triangulaire supérieure telle que $A = LU$.

Partie II

Soit L, U et $A = LU$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de coefficients respectifs, ℓ_{ij}, u_{ij} et a_{ij} .

1. A quelle condition sur les coefficients ℓ_{ij} la matrice L est-elle triangulaire inférieure ?
A quelle condition sur les coefficients u_{ij} la matrice U est-elle triangulaire supérieure ?
2. Nous supposons dorénavant que U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, montrer que l'on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \quad (1)$$

3. On considère, jusqu'à la fin de cette partie, la matrice d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

4. On cherche maintenant une matrice U triangulaire supérieure et une matrice L triangulaire inférieure ayant de plus tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, telles que $A = LU$.
- (a) En utilisant la formule (1) pour a_{11} , calculer u_{11} .
 - (b) En exprimant ensuite a_{i1} , calculer ℓ_{i1} pour tout $i \leq 3$.
 - (c) En exprimant a_{12} , calculer u_{12} .
 - (d) En exprimant a_{22} , calculer u_{22} .
 - (e) En exprimant a_{32} , calculer ℓ_{32} .
 - (f) En raisonnant de manière analogue, déterminer les coefficients restants.
5. Calculer U^{-1} et L^{-1} .
6. En déduire la solution de l'équation

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Partie III

Notons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . C'est à dire, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons

$$\| \|B\| \| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

1. Calculer $\| \|I\| \|$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Bx\| \leq \| \|B\| \| \|x\|.$$

3. Soit α un réel tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Bx\| \leq \alpha \|x\|.$$

Comparer α et $\| \|B\| \|$.

4. Montrer que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\| \|B_1 B_2\| \| \leq \| \|B_1\| \| \| \|B_2\| \|.$$

5. Soit B une matrice diagonale où les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont rangés de telle sorte que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|.$$

On note e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

- (a) Que vaut Be_i ?
 (b) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base canonique, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Bx\| \leq |\lambda_n| \|x\|.$$

- (c) Montrer que

$$|||B||| = |\lambda_n|.$$

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que la matrice $S = {}^tBB$ est diagonalisable.
 (b) Si u est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ , calculer $\|Bu\|^2$ en fonction de $\|u\|^2$ et de λ (Il peut être utile de remarquer que, pour tout vecteur colonne y de \mathbb{R}^n , on a $\|y\|^2 = {}^tyy$).
 En déduire que toutes les valeurs propres de S sont positives.
 Notons $\rho({}^tBB)$ sa plus grande valeur propre.

- (c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P telle que

$$D = {}^tPSP.$$

- (d) En déduire qu'il existe n nombres réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que nous supposons rangés par ordre croissant et n vecteurs p_1, \dots, p_n vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, & {}^tp_i p_i = 1, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, & Sp_i = \lambda_i p_i, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j, & {}^tp_i p_j = 0. \end{cases}$$

- (e) Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$, que valent $\|x\|$ et $\|Bx\|$?

- (f) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base (p_1, \dots, p_n) , montrer que $|||B||| = \sqrt{\rho({}^tBB)}$.

7. On considère la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $|||B|||$.

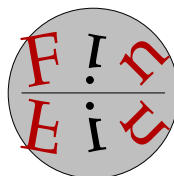
Les 2 premières parties présentent la décomposition LU d'une matrice qui permet de calculer facilement l'inverse de la matrice A^{-1} et donc de résoudre le système linéaire $Ax = b$ numériquement. La troisième partie introduit la notion de rayon spectral d'une matrice. On peut ensuite montrer (ce n'est pas l'objet de ce problème) que la condition $\rho({}^tBB) < 1$ implique que la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = Bx_k + b \end{cases}$$

converge quand k tend vers l'infini vers la solution du système linéaire

$$(I - B)x = b.$$

Cela permet de donner numériquement une valeur approchée de la solution de ce système en un temps beaucoup plus rapide que la méthode précédente.



À la prochaine