$E = \mathbb{R}^n$; $(n \geq 2)$; $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

page 1

$S = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u = u^*\}$

$A = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u^* = -u\}$

$N = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ u^* = u^* \circ u\}$

$O = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ u^* = Id_E\}$

$P = \{u^* \circ u \text{ tq } u \in \mathcal{L}(E)\}$

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u = \underbrace{\frac{u+u^*}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{u-u^*}{2}}_{\in A}$

S et A étant des s.e.v de $\mathcal{L}(E)$ tq $S \cap A = \{0\}$, alors $\boxed{\mathcal{L}(E) = S \oplus A}$

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans $\mathcal{B}$, $M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$. $\mathcal{B}$ est orthonormale, la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est ${}^tM$. on vérifie facilement que $M\,{}^tM \neq {}^tM\,M$ c.à.d $u \circ u^* \neq u^* \circ u$, alors $u \notin N$ et $N \neq \mathcal{L}(E)$.

d'autre part : $S \subset N$ et $A \subset N$ et $S + A = \mathcal{L}(E) \not\subset N$ alors

$\boxed{N \text{ n'est pas un s.e.v de } \mathcal{L}(E)}$

$S \subset Vect(N)$ et $A \subset Vect(N) \Rightarrow S + A = \mathcal{L}(E) \subset Vect(N) \subset \mathcal{L}(E)$

Alors $\boxed{Vect(N) = \mathcal{L}(E)}$

3) Soient $u, v \in S$ $\quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^* = v \circ u$

donc $u \circ v \in S$ ssi $u \circ v = v \circ u$.

Soient $u, v \in S$ représentés dans $\mathcal{B}$ par les matrices

$X = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$. $XY \neq YX$

alors $u \circ v \neq v \circ u$ alors $u \circ v \notin S$ $\boxed{S \text{ n'est pas stable par la loi } \circ}$

Soit $u \in A$ $\quad (u \circ u)^* = u^* \circ u^* = u \circ u$ alors $u \circ u \in S$ donc $u \circ u \in A$ ssi $u \circ u = 0$. Soit $u \in A$ représenté dans $\mathcal{B}$ par la matrice

$Z = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$, $Z^2 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -1 & \\ & -1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \neq 0$ c.à.d $u \circ u \neq 0$.

$\boxed{A \text{ n'est pas stable par la loi } \circ}$

4) Dans cette question $n=2$. Soit $u \in \mathcal{L}(F)$ représenté dans $\mathcal{B}$ par sa matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$u \in N \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+c^2 = a^2+b^2 \\ ab+cd = ac+bd \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2 = b^2 \\ c(d-a) = b(d-a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c \\ d = a \end{cases} \quad \text{ou} \quad b = c$$

$$\boxed{\text{Pour } n=2, \text{ les éléments de } N \text{ sont ceux représentés dans } \mathcal{B} \text{ par une matrice de la forme } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ ou de la forme } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}$$

5) Soient $u, v \in N$ représentées dans $\mathcal{B}$ par les matrices

$$X = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

$$XY = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix},$$

la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas de la forme précédente (4) alors $(u \circ v) \notin N$.

$$\boxed{N \text{ n'est pas stable par la loi } \circ}$$

Dans la suite, soit C un cône d'un $\mathbb{R}$-ev F, càd C une partie de F tq $\begin{cases} C \neq \emptyset \\ \forall (x,t) \in C \times \mathbb{R}_+ \,;\, (tx) \in C. \end{cases}$

6) $\Rightarrow$) on suppose que C est un cône convexe.

$C \neq \emptyset$ et $\forall (x,y) \in C \times C \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \; ((tx) \in C$

en particulier $2x \in C$ et $2y \in C$ et de la convexité $\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y) \in C$

càd $\quad \forall (x,y) \in C \times C \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} (x+y) \in C \\ tx \in C \end{cases}$

($\Leftarrow$) Si $C \neq \emptyset$ et $\forall (x,y) \in C \times C \,.\, \forall t \in \mathbb{R}^+ \begin{cases} x+y \in C \\ tx \in C \end{cases}$

d'une part C est un cône et $\forall x,y \in C \; \forall \lambda \in [0,1]$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $(1-\lambda) \in \mathbb{R}^+$ alors $\lambda x \in C$ et $(1-\lambda)y \in C$ et donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$

C est alors convexe

7) Soit R une relation d'ordre compatible sur F

c.à.d $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x, y, z \in F \ [x R y \Rightarrow (x+z) R (y+z)$ et $(tx) R (ty))$

On pose : $D = \{x \in F$ tq $0_F R x\}$

$\forall t \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D \qquad 0_F R x \Rightarrow t.0_F R (tx) \Rightarrow 0_F R (tx)$

alors $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D \ (tx) \in D \quad D$ est alors un cône.

Soient $x, y \in D$ tq $x+y \in D \qquad 0_F R x$ et $0_F R y$

d'après la compatibilité $0_F + y R x+y$ alors $0_F R y R x+y$

par transitivité $0_F R x+y$ d'où

$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x, y \in D \qquad x+y \in D$ et $tx \in D$

$\boxed{D \text{ est alors un cône convexe}}$

soit $x \in D \cap (-D)$ alors $\quad 0_F R x$ et $0_F R (-x)$

par compatibilité $(0_F + x) R (-x+x)$ c.à.d $x R 0_F$

par antisymétrie $x = 0_F$, or $0_F \in D \cap (-D) \quad (0_F R 0_F$ réflexivité$)$

d'où $\boxed{D \cap (-D) = \{0_F\}}$

Réciproquement soit D un cône convexe de F tq $D \cap (-D) = \{0_F\}$.

et soit R la relation binaire sur F définie par :

$\forall x, y \in F \quad x R y \Leftrightarrow y - x \in D$

<u>Réflexivité</u>

soit $x \in F \qquad 0 \in \mathbb{R}^+ \quad 0.x = 0_F \in D \quad$ ~~alors~~ $x - x \in D$

alors $x R x$ d'où R est réflexive.

<u>antisymétrie</u>

Soient $x, y \in F$ tq $x R y$ et $y R x$

$y - x \in D$ et $x - y \in D \qquad y - x \in D \cap (-D) = \{0\}$ alors $y = x$

d'où R est antisymétrique.

<u>Transitivité</u>

Soient $x, y, z \in F$ tq $x R y$ et $y R z$

$y - x \in D$ et $z - y \in D$ alors $(y - x) + (z - y) = z - x \in D$ c.à.d $x R z$

d'où R est transitive.

R est alors une relation d'ordre sur F.

Soient $x, y, z \in F$ et $t \in \mathbb{R}^+$

$xRy \Rightarrow y - x \in D \Rightarrow t(y-x) \in D \Rightarrow ty - tx \in D \Rightarrow (tx)R(ty)$

$xRy \Rightarrow (y+z)-(x+z) \in D \Rightarrow (x+z)R(y+z)$

d'où $\boxed{R \text{ est une relation d'ordre compatible sur } F}$

$\forall x \in F \quad x \in D \Leftrightarrow x - 0_F \in D \Leftrightarrow 0_F R x$

d'où $\boxed{D = \{x \in F \text{ tq } 0_F \leq x\}}$

Conclusion

Soit D une partie de F, D est un cône convexe tq $D \cap (-D) = \{0_F\}$

ssi $\exists R$ une relation d'ordre compatible sur F tq

$D = \{x \in F \ / \ 0_F \leq x\}$

8) Posons : $\mathcal{P} = \{u \circ u \text{ tq } u \in S\}$

$\mathcal{P}' = \{u \in S \text{ tq } \forall x \in E \ (u(x)|x) \geq 0\}$

$\mathcal{P}'' = \{u \in S$ tq les valeurs propres de u sont $\geq 0\}$.

on va mq $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}'' \subset \mathcal{P}$.

$\boxed{\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'}$ soit $u \in S$ $\quad \forall x \in E \quad (u \circ u(x)|x) = (u(x)|u^*(x)) = (u(x)|u(x)) \geq 0$

alors $u \circ u \in \mathcal{P}'$ d'où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

$\boxed{\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}''}$ soit $u \in \mathcal{P}'$ et λ une valeur propre de u et $x \in E$ un vecteur propre associé à λ. $\quad (u(x)|x) = \lambda \|x\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

alors toute valeur propre de u est ≥ 0 c.à.d $u \in \mathcal{P}''$ donc $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}''$

$\boxed{\mathcal{P}'' \subset \mathcal{P}}$ soit $u \in S$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall i = 1 \ldots n \quad v(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$

alors $v \in S$ (puisque la matrice de v dans une base orthonormale est diagonale (donc symétrique)).

et $v \circ v = u \in \mathcal{P}$. d'où $\mathcal{P}'' \subset \mathcal{P}$

9) soit $u \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P})$ alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ et $Sp(-u) \subset \mathbb{R}^+$

or $Sp(-u) = -Sp(u) \subset \mathbb{R}^-$ d'où $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$

$Sp(u) = \{0\}$ et u diagonalisable alors $u = 0$ et $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

soit $t \in \mathbb{R}^+$ $\quad Sp(tu) = \{\lambda t \text{ tq } \lambda \in Sp(u)\} \subset \mathbb{R}^+$ et $(tu)^* = tu^* = tu$

càd $tu \in S$ d'où $\forall u \in \mathcal{C}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $tu \in \mathcal{C}$.

Soient $u, v \in \mathcal{C}$ mq $u + v \in \mathcal{C}$. d'une part : $(u+v)^* = u^* + v^* = u + v$

d'autre part $\forall x \in E$ $((u+v)(x)/x) = (u(x)/x) + (v(x)/x) \geq 0$

d'où $\forall u, v \in \mathcal{C}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $u + v \in \mathcal{C}$ et $tu \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \neq \emptyset$ $(0 \in \mathcal{C})$

Finalement $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un cône convexe tq } \mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}}$

10) l'existence de v est déjà vue dans l'inclusion $\boxed{\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}}$ de la question 8. $u \circ v = v^3 = v \circ u$ alors les s.e.p de u sont stables par v. E est somme directe des sous espaces propres de u, alors il suffit de montrer l'unicité de v sur chaque s.e.p.

soit λ une valeur propre de u et E_λ le s.e.p correspondant.

soit $v_\lambda = v_{/E_\lambda}$, $v_\lambda^2 = \lambda \, id_{E_\lambda}$ jalors; v_λ est diagonalisable car v est diagonalisable et $v \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ n'a pas de valeur propre strictement négative alors la seule valeur propre de v_λ est $\sqrt{\lambda}$ tq $v_\lambda = \sqrt{\lambda} \, id_{E_\lambda}$.

v est alors unique sur E_λ $\forall \lambda \in Sp(u)$, d'où v est unique.

$\boxed{\text{Alors note } v = \sqrt{u}}$

11) Soit $u \in S$, on pose $|u| = \sqrt{u^2}$

<u>unicité</u> : soit $(u_+, u_-) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tq $\begin{cases} u = u_+ - u_- \\ |u| = u_+ + u_- \end{cases}$

alors $u_+ = \dfrac{u + |u|}{2}$ et $u_- = \dfrac{|u| - u}{2}$

<u>Existence</u>

soit $(e_1 \ldots e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u de valeurs propres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$\forall i = 1 \ldots n$ on pose : $\lambda_i^+ = \sup(\lambda_i, 0)$ et $\lambda_i^- = \sup(-\lambda_i, 0)$

$u^+ \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans $(e_1 \ldots, e_n)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^+ \end{pmatrix}$

$u^- \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans $(e_1 \ldots e_n)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1^- & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^- \end{pmatrix}$

la matrice de $|u|$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} |\lambda_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n| \end{pmatrix}$ (par unicité de $\sqrt{u^2}$)

étant donné que $\forall i = 1 \ldots, n$. $\begin{cases} \lambda_i^+ - \lambda_i^- = \lambda_i \\ \lambda_i^+ + \lambda_i^- = |\lambda_i| \\ \lambda_i^+ \lambda_i^- = 0 \end{cases}$

On a bien : $u = u_+ - u_-$; $|u| = u_+ + u_-$; $u_+ \circ u_- = u_- \circ u_+ = 0$.

12) Réciproquement soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u_1, u_2 \in \ldots$ tq

$$u = u_1 - u_2 \;;\quad u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1 = 0.$$

On a : $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ et u_1, u_2 sont diagonalisables, et u_1, u_2 sont symétriques positifs. alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres communs à u_1 et u_2, soit $(e_1 \ldots e_n)$ une telle base, $\forall i = 1 \ldots, n$ on pose : $u_1(e_i) = \alpha_i e_i$ et $u_2(e_i) = \beta_i e_i$

et $\forall i = 1 \ldots, n$ $\alpha_i \beta_i = 0$ ($u_1 \circ u_2 = 0$) et posons alors $\forall i$

$\lambda_i = \alpha_i - \beta_i$ alors $\alpha_i = \lambda_i^+$ et $\beta_i = \lambda_i^-$ et $u(e_i) = \lambda_i e_i$

d'où par unicité de u_+ et u_- on a : $u_+ = u_1$ et $u_- = u_2$.

13) on suppose que u est une symétrie orthogonale sur un s.e.v H.

alors $|u| = id_E$; u_+ est le projecteur orthogonal sur H.

u_- est le projecteur orthogonal sur $H^\perp$.

14) <u>Application :</u>

Soient $A, |A|, A_+, A_-$ les matrices respectives de $u, |u|, u_+, u_-$ dans la base B. on a : $A^2 = I_2$ alors u est une symétrie et puisque $A \in O(2)$ alors u est une symétrie orthogonale.

on voit bien que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ u est la réflexion d'axe $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. donc : $u(1,1) = (1,1)$, $u(1,-1) = (-1,1)$

$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad$ $u_+(1,1) = (1,1)$, $u_+(1,-1) = 0$

$u_+(1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $u_+(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

On déduit alors que $A_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

15) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ -1-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -1-\lambda & \lambda-2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$E_{-1}(A)$? $\begin{cases} x - y - z = -x \\ -x + y - z = -y \\ -x - y + z = -z \end{cases} \iff x = y = z$ alors $E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$

$E_2(A)$? $\begin{cases} x - y - z = 2x \\ -x + y - z = 2y \\ -x - y + z = 2z \end{cases} \iff x + y + z = 0$, $E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \in O(3).$$

$$A = Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tQ$$

$$A_+ = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tQ \quad \text{et} \quad A_- = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

$$|A| = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tQ$$

Je vous laisse le soin d'achever les calculs.

16) Dans cette question soit $u \in N$ tq $\det(u) \neq 0$.

Page 8

a) On suppose que $u = v \circ w$ avec $(v,w) \in P \times O$

$u \circ u^* = v \circ w \circ w^* \circ v^* = v^2$ alors $\boxed{v = \sqrt{u \circ u^*}}$ et $\boxed{w = v^{-1} \circ u}$

d'où si $(v,w) \in P \times O$ tq $u = v \circ w$ alors un tel (v,w) est unique

b) Posons $v = \sqrt{u \circ u^*}$ et $w = v^{-1} \circ u$

$w^* = u^* \circ v^{-1}$ et $w w^* = v^{-1} \circ u \circ u^* \circ v^{-1} = v^{-1} \circ v^2 \circ v^{-1} = Id_E$.

alors $w \in O$, $v = \sqrt{u \circ u^*} \in P$ et on a : $u = v \circ w$.

d'autre part : $v^2 = u \circ u^*$ et on a : $u \circ u^* = u^* \circ u$ alors $v^2 u = u v^2$.

v est symétrique déf $=$ positif, alors v et v^2 ont les m̂ s.e.p

et sont diagonalisables. Soient $\lambda \in Sp(v)$ et $x \in \ker(v - \lambda Id)$

$\lambda u v(x) = u v^2(x) = v^2 u(x) = \lambda^2 u(x)$ car $\ker(v^2 - \lambda^2 Id_E)$ est stable

par u, alors $u v(x) = \lambda u(x) = v u(x)$

$uv = vu$ sur $\ker(v - \lambda Id)$ $\forall \lambda \in Sp(v)$ alors $uv = vu$.

alors $w = u \circ v^{-1}$ et $w = v^{-1} \circ u$

Alors $\boxed{\forall u \in N \text{ ; tq } \det(u) \neq 0 \text{ ; } \exists! (v,w) \in P \times O \text{ tq } u = v \circ w = w \circ v}$

17) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Mq $Im(u \circ u^*) = Im(u)$ et $\ker(u \circ u^*) = \ker(u^*)$

on a : $\ker(u^*) \subset \ker(u \circ u^*)$, soit $x \in \ker(u \circ u^*)$ alors $(u \circ u^*(x) / x) = 0$

càd $\|u^*(x)\|^2 = 0$ càd $u^*(x) = 0$ et $x \in \ker(u^*)$ $\boxed{\ker(u \circ u^*) = \ker(u^*)}$

par le Th du rang $rg(u \circ u^*) = rg(u^*) = rg(u)$

alors $\dim(Im(u \circ u^*)) = \dim(Im(u))$ et puisque $Im(u \circ u^*) \subset Im(u)$

on déduit : $\boxed{Im(u \circ u^*) = Im(u)}$

b) Soit $u \in N$ $\quad Im(u) = Im(u \circ u^*) = Im(u^* \circ u) = Im(u)$

$$\boxed{Im(u) = Im(u^*)}$$

$$\ker(u^*) = \ker(u \circ u^*) = \ker(u^* \circ u) = \ker(u)$$

$$\boxed{\ker(u) = \ker(u^*)}$$

Soient $y \in Im(u)$ et $z \in \ker(u)$; $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

$(y / z) = (u(x) / z) = (x / u^*(z)) = (x / 0) = 0 \quad (z \in \ker(u) = \ker(u^*))$

alors $\ker(u) \perp Im(u)$ et par le Th du rang on a : $\boxed{Im(u) = \ker(u)^{\perp}}$

page 9

18) on suppose ici que $u \in N$ et que $\det(u) = 0$.

soit u_0 la restriction de u à $\mathrm{Im}(u)$

écartons le cas $u = 0$ (pour lequel on peut prendre $v = 0$ et $w \in O$)

$\det(u_0) \neq 0$ et $u_0 \circ u_0^* = u_0^* \circ u_0$.

D'après 16) il existe un endomorphisme v_0 symétrique positif de $\mathrm{Im}(u)$

et un $w_0 \in O(\mathrm{Im}(u))$ tq $u_0 = v_0 \circ w_0 = w_0 \circ v_0$

Soient $v \in \mathcal{S}$ et $w \in O$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathrm{Im}(u) & v(x) = v_0(x) \\ \forall x \in \ker(u) & v(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathrm{Im}(u) & w(x) = w_0(x) \\ \forall x \in \ker(u) & w(x) = x \end{cases}$$

alors $u = v \circ w = w \circ v$

19) si $u \in S$ alors $v = |u|$ et si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(u)$ ~~formée~~ par des vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^*$ alors $\forall i = 1, \ldots, p$

$u(e_i) = \lambda_i e_i = w(|\lambda_i| e_i) = |\lambda_i| w(e_i)$ alors

alors w est défini par : $\begin{cases} \forall x \in \ker(u) & w(x) = x \\ \forall i = 1, \ldots, p & w(e_i) = \mathrm{sg}(\lambda_i) e_i \end{cases}$

20) Soit $u \in N$; $u = v \circ w = w \circ v$ avec $(v, w) \in \mathcal{S} \times O$

$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| = \|w(v(x))\| = \|v(x)\| \qquad (w \in O)$

alors $\sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\| = \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|v(x)\| \qquad \boxed{\|u\| = \|v\|}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u^n = v^n \circ w^n = w^n \circ v^n$ alors $\|u^n\| = \|v^n\|$

or ~~lorsque~~ f est un endomorphisme symétrique positif de E, on a : $\|f\|$ est la plus grande valeur propre de f.

en particulier pour $v \in \mathcal{S}$ on a : $v^n \in \mathcal{S}$ et si λ est la plus grande valeur propre de v, la plus grande valeur propre de v^n est λ^n

$\|v^n\| = \lambda^n = \|v\|^n = \|u\|^n$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u^n\| = \|u\|^n}$