Banque PT 2006 — épreuve A

Préliminaires

Question 1.
Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite symétrique si pour tout (i, j), on a $a_{ij} = a_{ji}$, c'est-à-dire si $A = {}^tA$.

Question 2.
Une matrice carrée est orthogonale si A est inversible et son inverse est égale à sa transposée, autrement dit $A\,{}^tA = I_n$, où I_n désigne la matrice unité.

Question 3.
Le produit AB existe si $q = m$.
Dans ce cas le produit AB possède p lignes et n colonnes.
On a, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$.

Partie I

Question I.1
L est triangulaire, donc dét $L = 1$ (c'est le produit des termes diagonaux).
Ensuite : $\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$

Question I.2
Comme ces deux matrices sont de déterminant non nul, elles sont inversibles.
La méthode du pivot conduit à $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On aura remarqué que dans cette méthode du pivot, la matrice L étant triangulaire, les calculs sont extrêmement simples et se résument à évaluer simultanément $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Question I.3
Si on veut que $A = LU$, on est obligé de prendre $U = L^{-1}A$ et on trouve $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, qui est bien triangulaire supérieure.

Partie II

Question II.1
On dit que L est triangulaire supérieure si $\ell_{ij} = 0$ dès que $1 \leqslant i < j \leqslant n$; on dit que U est triangulaire supérieure si $u_{ij} = 0$ dès que $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Question II.2
La formule habituelle est $a_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ell_{ik}u_{kj}$, mais si $k > i$ on a $\ell_{ik} = 0$ et si $k > j$ on a $u_{kj} = 0$, de sorte qu'on peut ne calculer la somme que pour $k \leqslant \min(i, j)$: $a_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik}u_{kj}$.

Question II.3
On a :

$$\det A \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{=} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 \times (-1) \times (-1) = 5 \neq 0,$$

donc A est inversible.

Question II.4

II.4.a La formule (1) fournit $1 = a_{11} = \ell_{11}u_{11} = u_{11}$ donc $u_{11} = 1$.

II.4.b Puis $2 = a_{21} = \ell_{21}u_{11} = \ell_{21}$ et $2 = a_{31} = \ell_{31}u_{11} = \ell_{31}$ donc $\ell_{21} = \ell_{31} = 2$.

II.4.c Puis $2 = a_{12} = \ell_{11}u_{12} = u_{12}$ donc $u_{12} = 2$.

II.4.d De même $1 = a_{22} = \ell_{21}u_{12} + \ell_{22}u_{22} = 2 \times 2 + 1 \times u_{22}$ donc $u_{22} = -3$.

II.4.e Pareillement $2 = a_{32} = \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} = 2 \times 2 - 3 \times \ell_{32}$ donc $\ell_{32} = \dfrac{2}{3}$.

II.4.f Reste à trouver la troisième colonne de U. On écrit $2 = a_{13} = \ell_{11}u_{13}$ donc $u_{13} = 2$; puis $2 = a_{23} = \ell 21 u_{13} + \ell 22 u_{23} = 2 \times 2 + u_{23}$ donc $u_{23} = -2$; enfin $1 = a_{33} = \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + \ell_{33}u_{33} = 2 \times 2 - \dfrac{2}{3} \times 2 + u_{33}$ donc $u_{33} = -\dfrac{5}{3}$.

Finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Question II.5

On trouve facilement $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/5 \\ 0 & -1/3 & 2/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$ et $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Là encore, les matrices étant triangulaires, on aura noté que les calculs sont extrêmement simples !

Question II.6

On résout $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff LUx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Notons $y = Ux$. Le système $Ly = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire, donc facile à résoudre, on obtient $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

On résout pour terminer le système $Ux = y$, qui est aussi triangulaire donc facile : on obtient finalement $x = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Partie III

Question III.1

Comme pour tout vecteur x non nul, on a $Ix = x$, on trouve bien sûr $|||I||| = 1$.

Question III.2

La majoration est évidente pour $x = 0$, puisque $\|B0\| = 0 \leqslant 0 = |||B|||\,\|0\|$.

Pour un vecteur $x \neq 0$, on a $|||B|||$ qui majore le quotient $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$ donc $\|Bx\| \leqslant |||B|||\|x\|$.

Question III.3

α est un majorant des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$, alors que $|||B|||$ est **la borne supérieure** de l'ensemble de ces quotients, c'est-à-dire le plus petit des majorants : c'est donc que $|||B||| \leqslant \alpha$.

Question III.4

Pour tout x, on a $\|(B_1B_2)(x)\| = \|B_1(B_2x)\| \leqslant |||B_1|||\|B_2x\| \leqslant |||B_1||| \times |||B_2|||\|x\|$, grâce au III.2. On en déduit que $\alpha = |||B_1||| \times |||B_2|||$ majore les quotients $\dfrac{\|B_1B_2x\|}{\|x\|}$, et d'après ce qui précède, $|||B_1B_2||| \leqslant \alpha = |||B_1|||\,|||B_2|||$.

Question III.5

Remarquons que l'hypothèse entraîne $\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^2$.

III.5.a Bien sûr, on a : $Be_i = \lambda_i e_i$.

III.5.b Donc, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$. Alors on peut écrire :

$$\|Bx\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_n^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2,$$

donc $\|Bx\| \leqslant |\lambda_n| \|x\|$.

III.5.c $|\lambda_n|$ est donc un majorant des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$, et donc, comme on l'a vu en III.3, on a $|||B||| \leqslant |\lambda_n|$.

Mais on a de plus $\|Be_n\| = \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n|$ donc $\dfrac{\|Be_n\|}{\|e_n\|} = |\lambda_n|$ et on a aussi $|||B||| \geqslant |\lambda_n|$.

Finalement $|||B||| = |\lambda_n|$.

Question III.6

III.6.a La matrice S est symétrique donc diagonalisable : en effet, ${}^tS = {}^t({}^tBB) = {}^tB\,{}^{tt}B = {}^tBB = S$.

III.6.b On nous fait remarquer que pour tout vecteur y, $\|y\|^2 = {}^tyy$.

On en déduit que $\|Bu\|^2 = {}^t(Bu)\,(Bu) = {}^tu{}^tBB\,u = {}^tu\,S\,u = {}^tu\,\lambda u = \lambda\,{}^tuu = \lambda\|u\|^2$.

Ainsi on a $\lambda = \dfrac{\|Bu\|^2}{\|u\|^2} \geqslant 0$.

III.6.c S étant symétrique, elle est non seulement diagonalisable mais diagonalisable dans une base orthonormée.

C'est dire qu'il existe P orthogonale telle que $D = P^{-1}SP = {}^tPSP$ est une matrice diagonale.

III.6.d Soit p_i le vecteur i-ème colonne de la matrice P : $(p_1, \ldots, p_n)$ est une base orthonormée de diagonalisation de S.

C'est dire que chaque p_i est de norme 1 : ${}^tp_ip_i = 1$; que les p_i sont deux à deux orthogonaux : ${}^tp_ip_j = 0$ si $i \neq j$; que chaque p_i est vecteur propre de S : il existe $\lambda_i \geqslant 0$ tel que $Sp_i = \lambda p_i$.

Il suffit de ranger ces vecteurs dans l'ordre croissant des λ_i pour conclure au résultat demandé.

III.6.e On a $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$ et $Sx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i p_i$. Mais comme la base $(p_1, \ldots, p_n)$ est orthonormée, cela prouve que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ et $\|Bx\|^2 = {}^t(Bx)\,(Bx) = {}^tx{}^tBB\,x = (x \mid S\,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$.

III.6.f $|||B|||$ est la borne supérieure des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$ pour $x \neq 0$.

Or pour $x = p_n$, on trouve $\|Bp_n\|^2 = \lambda_n$ et $\|p_n\|^2 = 1$ (prendre $\alpha_i = 0$ sauf $\alpha_n = 1$), donc le quotient vaut ici $\sqrt{\lambda_n}$ et donc $|||B||| \geqslant \sqrt{\lambda_n}$.

Mais λ_n est la plus grande des valeurs propres, donc $\|Bx\|^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$, ce qui permet de majorer tous les quotients par $\sqrt{\lambda_n}$.

Finalement $|||B||| = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho({}^tBB)}$.

Question III.7

On évalue $S = {}^tBB = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de S sont $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5} < \lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$.

On en déduit que $|||B||| = \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.