CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1990
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'algèbre

Soit E le **R** -espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) muni de la base canonique B et de la structure euclidienne naturelle , B étant alors une base orthonormée. On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E et pour tout u dans L(E) u* l'adjoint de u .

On définit les ensembles S , A , N , O , P par :

$S = \{ u \in L(E) / u = u^* \}$

$A = \{ u \in L(E) / u + u^* = 0 \}$

$N = \{ u \in L(E) / u \circ u^* = u^* \circ u \}$

$O = \{ u \in L(E) / u \circ u^* = Id_E \}$

$P = \{ u^* \circ u \text{ avec } u \in L(E) \}$

On pourra utiliser sans démonstration le théorème classique suivant :

Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent .
alors il existe une base composée de vecteurs propres à la fois pour u et pour v .

1) Montrer que : $L(E) = S \oplus A$.

2) N est-il un sous espace vectoriel de L(E) ? Déterminer le sous espace engendré par N noté vect (N).

3) S et A sont-ils stables pour la loi $\circ$?

4) Dans cette question n=2. Déterminer N en donnant la forme des matrices de ses éléments dans la base B.

5) N est-il stable pour la loi $\circ$?

On appelle cône d'un **R** - espace vectoriel F une partie non vide C stable pour la multiplication par un réel positif ($\forall (x,t) \in C \times R_+ , (tx) \in C$) .

6) Montrer que C est un cône convexe si et seulement si :

$C \neq \emptyset$ et $\forall (x,y) \in C \times C , \forall t \in R_+ , (x+y) \in C$ et $tx \in C$.

On dit qu'une relation d'ordre *R* définie sur un **R** - espace vectoriel F est compatible si :

$\forall t \in R_+ , \forall (x,y,z) \in F^3 , x \, R \, y \Rightarrow (x+z \, R \, y+z$ et $tx \, R \, ty)$.

7) Soit *R* une relation d'ordre compatible sur F. On pose : $D = \{ x \in F / 0_F \, R \, x \}$.

Montrer que D est un cône convexe et que $D \cap (-D) = \{0_F\}$.

Etudier la réciproque .

8) Montrer les égalités suivantes :

$P = \{ u \circ u , u \in S \} = \{ u \in S / \forall x \in E , \langle u(x) | x \rangle \geq 0 \} = \{ u \in S /$ les valeurs propres de u sont positives ou nulles $\}$.

9) Montrer que P est un cône convexe et que $P \cap (-P) = \{0\}$.

10) Montrer que pour tout u dans P il existe un unique v dans P tel que $v \circ v = u$. (v est appelée la racine carrée de u et on note $v = \sqrt{u}$)

11) Soit u un élément de S. On pose $|u| = \sqrt{u^2}$. Montrer qu'il existe un unique couple (u_+ , u_-) dans P tel que :

$u = u_+ - u_-$, $|u| = u_+ + u_-$, $u_+ \circ u_- = u_- \circ u_+ = 0$.

12) Réciproquement soit u un élément de L(E) et (u_1 , u_2) un couple de P, vérifiant :

$u = u_1 - u_2$, $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1 = 0$.

Montrer alors que $u \in S$, $u_1 = u_+$ et $u_2 = u_-$.

13) Que sont $|u|$, u_+, u_- si u est une symétrie orthogonale ?

14) Application : soit A, $|A|$, A_+, A_- les matrices de u, $|u|$, u_+, u_- dans la base B.

Déterminer $|A|$, A_+, A_- dans le cas ou $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

15) Même question dans le cas où $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

16) On considère dans cette question u un élément de N avec $\det u \neq 0$.
Le but de cette question est de montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(v, w) \in P \times O$ tel que $u = v \circ w = w \circ v$.

a) On suppose que $u = v \circ w$ avec $(v, w) \in P \times O$. Calculer $u \circ u^*$ et en déduire v et w en fonction de u. Conclure.

b) En utilisant le résultat précédent démontrer l'existence du couple (v ,w) .

17) a) Soit u un élément de L(E). Montrer que : $\mathrm{Im}(u \circ u^*) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u \circ u^*) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

b) En déduire que si $u \in N$: $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^*)$, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$ et $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

18) On suppose ici que $u \in N$ et que $\det u = 0$.
Montrer l'existence d'un couple $(v,w) \in P \times O$ tel que $u = v \circ w = w \circ v$
(On pourra étudier la restriction de u à Im(u)). A-t-on l'unicité ?

19) Que représente w si u est un élément de S ?

20) Soit $u \in N$, $u = v \circ w = w \circ v$ avec $(v,w) \in P \times O$.
Montrer que $\|u\| = \|v\|$ puis que $\|u^n\| = \|u\|^n$.

On rappelle que si $u \in L(E)$, $\|u\| = \sup \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, $x \in E - \{0\}$.