CPGE My Youssef, Rabat

DL 8 Bis-Bis: *Espaces vectoriels euclidiens*

17 janvier 2010

Factorisation QR et applications

Blague du jour :
• C'est une bande de poissons en train de piller de la nourriture, un poisson voit une toile de mer et dit : Attention voilà le shérif !
• Une puce et un labrador discutent :
-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

Mathématicien du jour — *Householder*

Alston Scott Householder (1904 -1993) est un mathématicien américain specializé en mathématiques appliquées à la biologie et en analyse numérique. On lui doit les transformations de Householder et les méthodes de Householder pour la résolution d'équations algébriques ou linéaires. Il a contribué au développement de plusieurs revues mathématiques, il a été président de l'American Mathematical Society

Objectif : Le but de ce devoir libre est de présenter différentes méthodes pour obtenir la factorisation QR très utile pour la résolution exacte ou approchée d'un système linéaire $Ax = b$ et une application pour la résolution du problème des moindres carrées.

Partie I : Factorisation QR.

On se propose dans cette partie de démontrer puis de donner des application du théorème suivant :

Théorème 1 *Toute matrice carrée A se décompose sous la forme $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique si on impose le signe des termes diagonaux de Q, quand A est inversible.*

1- Unicité.

Soit Q, Q' deux matrices orthogonales et R, R' deux matrices triangulaires supérieures telles $QR = Q'R' = A$ inversibles.

1) Dire pourquoi QQ'^{-1} est orthogonale, triangulaire supérieure. En déduire qu'elle est diagonale.

2) Que peut-on dire de ses termes diagonaux.

3) Conclure.

2- Existence

2.1- Méthode de Gram-Shmidt.

Soit A une matrice carré d'ordre n inversible. On suppose $A = QR$ avec Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure carrées d'ordre n. Soit A_j, Q_j et R_j les colonnes respectives des matrices A, Q et R. On note par $r_{i,j}$ les coefficients de la matrice R, avec $r_{ii} \geq 0$.

1) Montrer que : $\begin{cases} A_1 = r_{11}Q_1 \\ A_2 = r_{12}Q_1 + r_{22}Q_2 \\ \vdots \\ A_n = r_{1n}Q_1 + r_{2n}Q_2 + \cdots + r_{nn}Q_n \end{cases}$

2) Dire comment trouver les coefficients r_{ij} et les colonnes Q_i.
Indication : les colonnes Q_i forment un base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

3) Montrer que Vect$(A_1, \cdots, A_k)$ =Vect$(Q_1, \cdots, Q_k)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$.
Que représente la famille $(Q_1, \cdots, Q_n)$ pour la famille $(A_1, \cdots, A_n)$, et proposer une une méthode de calcul simple pour trouver les matrices Q et R.

4) Que se passe-t-il quand la matrice A n'est pas inversible.

2.2- Méthode de Givens.

Idée : Multiplier $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ successivement par des matrices orthogonales pour faire apparaître des zéros en dessous de la diagonale.
Soit i, j deux indices fixes. On pose :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ji} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ij} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On pose } Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & c_{ij} & & & & s_{ij} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & -s_{ij} & & & & c_{ij} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que Q_1 est la matrice d'une rotation.

2) Montrer que le coefficient d'indice (j, i) de Q_1A est nul.

3) Dire comment trouver les matrices Q et R.

4) Écrire un programme qui décrit la méthode de Givens.

2.2- Méthode de Householder.

Définition 1 *On appelle matrice de Householder, toute matrice $H(v)$ de la forme :*
$H(v) = I_n - \dfrac{v^t v}{\|v\|^2}$ *où v est un vecteur colonne.*

1) Montrer que les matrices de Householder sont des matrices orthogonales.

2) Soit $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, on se propose de montrer dans cette question qu'il existent deux matrices de Householder $H(v_1)$ et $H(v_2)$ telles que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. On note par $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) 1èr cas : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| \neq 0$. On pose $v_1 = a + \|a\|e_1$ et $v_2 = a - \|a\|e_2$.
- Montrer que v_1 et v_2 sont différents et distincts.
- Calculer ${}^t e_i H(v_1)a$ et ${}^t e_i H(v_2)a$.
- En déduire le résultat.

b) 2ème cas : $\sum_{i=2}^{n} |a_i| + 0$.
- Montrer que $H(a_1 + \|a\|e_1)a = \|a\|e_1$.
- En déduire le résultat.

3) On note par a la 1ère colonne de A, soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. Quelle est la forme de la matrice HA.

4) Si A est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ Dire comment annuler les coefficients en dessous de la diagonale dans la 2ème colonne de A.

5) Dire comment trouver les matrices Q et R.

Partie II. Méthode des moindres carrés

Problème : Quel est la droite la plus proche à trois points donnés. En général quel est le polynôme de degré m (degré fixe), dont la courbe est la plus proche à n points donnés.

Position du problème : Soit m, n deux entiers naturels donnés et $M_i = (x_i, y_i),\ (1 \leq i \leq n)$ n points donnés. Comment choisir les coefficients du polynôme de degré m, $P(X) = \sum_{k=1}^{m} a_k X^{k-1}$ pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ soit minimale.

1) 1èr cas : $k = n$.

a) Donner l'écriture matricielle du système $\left\{\begin{array}{ccc} P(x_1) & = & y_1 \\ & \vdots & \\ P(x_n) & = & y_n \end{array}\right.$

b) En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution unique.

c) Quel est cette solution.

2) 2ème cas : $k \leq n$.

a) Écrire $\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ sous la forme $\|Ax - b\|^2$ où A une matrice et x, b deux vecteurs colonnes à déterminer.

b) En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution au point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \vec{0}$ où $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

c) En déduire que a est solution du système ${}^tAAx = {}^t b$

d) Dire pourquoi ce dernier système admet une solution.

e) Dire comment appliquer la factorisation QR pour la résolution de de dernier système.

f) Application : Quelle est la droite du plan la plus proche aux trois points $A(0, 0), B(1, 0)$ et $C(0, 1)$.

3) 3ème cas : $k \geq n$. Y-a-t-il des solutions au problème des moindres carrés dans ce cas.

Fin
À la prochaine