.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir surveillé N°4

Espaces vectoriels euclidiens Calcul différentiel

MP-CPGE RABAT

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Méthode pour éteindre un feu :
- Une personne normale va chercher un seau d'eau et la jette sur le feu.
- Un physicien regarde le feu en faisant des calculs précis pour estimer la quantité d'eau à utiliser.
- Un mathématicien regarde le feu et dit : " Je sais que la solution existe. "

David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien allemand. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert).
L'un des exemples les mieux connus de sa position de chef de file est sa présentation, en 1900, de ses fameux problèmes qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du XXe siècle. Hilbert et ses étudiants ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale.
Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor en théorie des ensembles et sur les nombres transfinis. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Mathématicien du jour

1 Problème 1 : MINES-PONTS 2003, MP, Math 2

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre
L'objet du problème est l'étude de méthodes analytiques (méthodes du gradient, du Lagrangien) pour résoudre l'équation linéaire $A.x = b$ où A est une matrice symétrique positive, inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$. Dans tout le problème, l'entier n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n = 2$) ; la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $e_1, e_2, ..., e_n$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est noté $(x|y)$. La norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$. Les matrices considérées sont réelles ; l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est admis que l'application qui, à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la borne supérieure $N(M)$ des

normes des images par M des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est une norme : $N(M) = \sup_{\|x\|=1} \|M.x\|$. Une matrice symétrique A est dite positive lorsque, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire des vecteurs $A.x$ et x est positif ou nul $(A.x|x) \geqslant 0$.

1.1 Première partie

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu.

a Résultats préliminaires

: Soit M une matrice carrée symétrique d'ordre n.

1 Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q tels que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire $(M.x|x)$ vérifie l'encadrement suivant : $p\|x\|^2 \leqslant (M.x|x) \leqslant q\|x\|^2$.
Préciser ces deux réels p et q en fonction des valeurs propres de la matrice M.

2 Montrer que, pour que cette matrice M soit inversible et positive, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient strictement positives.

3 Démontrer que la norme $N(M)$ d'une matrice M symétrique est égale à la plus grande valeur absolue des valeurs propres λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de la matrice M : $N(M) = \sup_{(1\leqslant i\leqslant n)} |\lambda_i|$.Etant donnés la matrice carrée, d'ordre n, symétrique positive A et le vecteur b, soit α un réel strictement positif strictement majoré par $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$ o'u λ_n est la plus grande valeur propre de la matrice A ; soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un premier vecteur x^0 choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^n$ et par la relation de récurrence suivante : pour tout entier naturel k, $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - A.x^k)$.

b Etude de la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$

:

4 Démontrer que la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite le vecteur z de l'espace $\mathbb{R}^n$, solution de l'équation $A.x = b$.
Soit f la fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^n$, par la relation : $f(x) = \dfrac{1}{2}(A.x|x) - (b|x)$.

c Minimum de f

:

5 Calcul préparatoire : démontrer que l'expression $f(x+u) - f(x)$ se calcule en fonction des expressions $(A.u|u)$, $(A.x|u)$ et $(b|u)$.

6 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto f(x)$ admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(1 \leqslant k \leqslant n) : x \to \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.
Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, soit $g(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, sont égales aux valeurs des dérivées partielles de la fonction f en ce point x : $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) e_k$.

7 Exprimer ce vecteur $g(x)$ au moyen de la matrice A et des vecteurs x et b.
Etant donnés deux vecteurs x et u de $\mathbb{R}^n$, soit $I(x,u)$ l'expression suivante :
$I(x,u) = f(x+u) - f(x) - (g(x)|u)$.

8 Démontrer que, pour tout vecteur x donné, il existe deux constantes positives ou nulles r et s telles que, pour tout vecteur u, $I(x,u)$ vérifie la relation suivante : $r\|u\|^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s\|u\|^2$.

9 Démontrer que, pour que la fonction f admette en z un minimum, il faut et il suffit que le vecteur z vérifie la relation $A.z = b$.

d Recherche du minimum de f

:
Soit α un réel compris strictement entre 0 et $2/\lambda_n$ $(0 < a < 2/\lambda_n)$.

10 Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, déterminer le signe de l'expression suivante $f(x - \alpha g(x)) - f(x)$.

11 Proposer, à partir de ce résultat, une méthode pour construire une suite de vecteurs $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur z en lequel la fonction f atteint son minimum ; la justication de la convergence n'est pas demandée.

1.2 Seconde partie

Le but de cette partie est de rechercher un vecteur x appartenant à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est supposé être le noyau d'une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; ce noyau est supposé différent de tout l'espace $\mathbb{R}^n$ $(\ker B \neq \mathbb{R}^n)$. L'équivalence, établie dans la première partie, entre d'une part résoudre l'équation $A.x = b$ et d'autre part chercher le vecteur z rendant minimum la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par la relation suivante $f(x) = \frac{1}{2}(A.x|x) - (b|x)$, conduit à se poser le problème suivant : Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le noyau F est différent de $\mathbb{R}^n$; rechercher un vecteur $\bar{x}$ appartenant à F rendant minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F.

a Existence du minimum de la fonction f dans F :

12 Démontrer que la fonction f possède la propriété suivante : pour tout réel c, il existe un réel ρ tel que, pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à ρ $(\|x\| \geqslant \rho)$, le réel $f(x)$ est supérieur ou égal à c $(f(x) \geqslant c)$.

13 En déduire que, si y est un point de F, il existe un réel r tel que pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à r $(\|x\| \geqslant r)$, $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$.

14 Démontrer à l'aide du résultat précédent qu'il existe au moins un vecteur $\bar{x}$ du sous-espace vectoriel F en lequel la restriction de la fonction f à ce sous espace F atteint un minimum.

15 Démontrer qu'il existe un seul vecteur $\bar{x}$ en lequel la fonction f atteint son minimum dans F, en admettant que la fonction f est convexe ; c'est-à-dire : pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de vecteurs et tout réel λ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$, les valeurs prises par la fonction f vérifient la relation suivante : $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, où l'inégalité est stricte si et seulement si les vecteurs x et y sont différents.

b Propriétés du point x :

16 Démontrer que, pour qu'un vecteur y de F rende minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F, il faut et il suffit que le vecteur $Ay-b$ soit orthogonal à ce sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

17 Démontrer que la valeur prise par la fonction f au point $\overline{x}$, en lequel elle atteint son minimum dans F, est donnée par la relation suivante : $f(\overline{x}) = -\dfrac{1}{2}(A\overline{x}|\overline{x}) = -\dfrac{1}{2}(b|\overline{x})$.

2 Problème 2 : Polytechnique 2010, MP, Math 1

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Sur quelques questions de calcul différentiel

Notations et conventions

Pour tout entier $n>0$, on note $\langle .\,,.\rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $||\,.\,||$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1. On note $\mathrm{Tr}\,(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^tM$ sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M\,{}^t\widetilde{M} = \det(M)\,I_n\,.$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t\mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M. De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi^k}{k!}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f:U\to\mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x, soit :

$$\forall h\in\mathbf{R}^n,\quad df_x(h) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right)\,.$$

4. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1}. Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n) .$$

5. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{cases} .$$

5a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b. Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}. Montrer que x est vecteur propre de A.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2 \end{cases}$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i-ème ligne et j-ième colonne,

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{cases}$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g.

6a. Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}\,({}^tMM)$.

6b. Vérifier que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c. Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.
En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \mathrm{Tr}\,({}^t\widetilde{M}H)$.

8. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}\,(M)}$.

10. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[\to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \mapsto M \exp(tM^{-1}H) \end{cases}$$

est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M$, $\gamma'(0) = H$.

.

11. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a. Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b. Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?

Fin !

Bonne Chance