.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir survéillé N°4 (Prs Doué et Boujaida)

Espaces vectoriels euclidiens Calcul différentiel

MP-CPGE Rabat

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Problème de la casserole de Poincaré : Dans une pièce, se trouve un évier muni d'un robinet d'eau courante, une casserole accrochée à un mur, un réchaud à gaz et une boîte d'allumettes.
Problème : comment faire chauffer de l'eau ?
Solution : on prend la casserole, on la remplit d'eau, on la pose sur le réchaud que l'on allume.

Deuxième problème : nous sommes dans la même pièce, mais à présent, la casserole est remplie d'eau, posée sur le réchaud. La question est la même : faire chauffer de l'eau.

Solution du physicien : on allume le réchaud.

Solution du mathématicien : on vide la casserole, on la raccroche au mur, et on est ramené au problème précédent.

Mathématicien du jour

Henri Poincaré (1854-1912)

Mathématicien, physicien et philosophe français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte. On le considère comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques.

1 Problème 1 : Corrigé Pr Doué

1.1 Première partie

1 On utilise le théorème spectral : M , symétrique réelle, admet une base $\mathcal{B}$ *orthonormée* de vecteurs propres . En écrivant $(x)_i$ les composantes d'un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base, on a que l'expression du produit scalaire est l'expression canonique, et d'autre part, que $M.x$ s'écrit simplement en fonction des valeurs propres (l_i) correspondantes de M : $(M.x)_i = l_i.(x)_i$. On en déduit : $(Mx \mid$

$x) = \sum_{i=1}^{n} l_i.(x)_i^2$. D'où, en appelant p (respectivement q) la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres de M , on a l'inégalité :

$$p.\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p.(x)_i^2 \leq (Mx \mid x) \leq \sum_{i=1}^{n} q.(x)_i^2 = q.\|x\|^2 \ .$$

Remarquons que ces inégalités sont les meilleures possibles, puisqu'elles deviennent des égalités lorsque x est un vecteur propre associé à la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres .

2 La condition suffisante découle de l'inégalité ci-dessus : si $p > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n \ (Mx \mid x) \geq p.\|x\|^2 \geq 0$; d'autre part, 0 n'est alors pas valeur propre , donc $M.x = 0 \Rightarrow x = 0$, et M est injective, donc inversible.
Mais la condition est aussi nécessaire, car l'inégalité $(Mx \mid x) \geq 0$ doit être en particulier vraie pour les vecteurs propres (non nuls) de M , d'où, pour toute valeur propre l_i de M , $l_i.\|x\|^2 \geq 0$, soit $l_i \geq 0$; de plus, l'inversibilité de M interdit la valeur propre 0 , donc les valeurs propres l_i de M sont bien > 0 .

3 En se plaçant toujours dans une base orthonormée propre pour M , on a, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|M.x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Mx)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2.x_i^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} l_i^2\right). \sum_{i=1}^{n} (x)_i^2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} l_i^2\right).\|x\|^2 \ .$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en utilisant $\sqrt{\left(\max_{1 \leq i \leq n} l_i^2\right)} = \max_{1 \leq i \leq n} |l_i|$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \|M.x\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |l_i|.\|x\|$, d'où déjà l'implication :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|x\| = 1 \Rightarrow \|M.x\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |l_i| \ ;$$

Mais la première inégalité ci-dessus devient une égalité si x est un vecteur propre associé à la valeur propre l_{i_0} telle que $|l_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |l_i|$. Comme un vecteur propre, non nul, peut toujours être normalisé, on voit que dans l'implication (1) on peut obtenir l'égalité à droite. Donc le nombre $\max_{1 \leq i \leq n} |l_i|$ est le plus petit des majorants possibles, soit par définition, $N(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |l_i|$.

4 On suppose ici, comme indiqué dans le préambule de cette partie de l'énoncé, que A est inversible, donc (cf **2.**) que les valeurs propres de A sont *strictement* positives.
La formule de récurrence s'écrit $x^{k+1} = S.x^k + \alpha.b$ où on a posé $S = Id - \alpha.A$. S est encore une matrice symétrique, dont les valeurs propres sont les $1 - \alpha.l_i$, l_1 , ... , l_n étant les valeurs propres (distinctes ou non) de A . Vu la condition imposée à α , les valeurs propres de S sont dans $]-1, 1[$, et en particulier $N(S) < 1$. L'unique point z vérifiant $A.z = b$ vérifie aussi $z = S.z + \alpha.b$, donc la suite de vecteurs $y^k = z - x^k$ vérifie la relation de récurrence $y^{k+1} = S.y^k$, soit $y^k = S^k.y^0$. Par propriété de la norme N , $\|S.y\| \leq N(S).\|y\|$, on a donc $\|y^k\| \leq (N(S))^k.\|y^0\|$. De $N(S) \in]0, 1[$ on conclut alors que $y^k \to 0$, soit $x^k \to z$.

5 Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve :

$$f(x+u) - f(x) = (Ax \mid u) - (b \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid u) = (Ax - b \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid u) \ .$$

6 Par définition, une dérivée partielle s'obtient en cherchant la limite de $\frac{1}{t}\big(f(x+te_k) - f(x)\big)$ lorsque $t \to 0$. Par le calcul précédent, on a

$$\frac{1}{t}\big(f(x+te_k) - f(x)\big) = (Ax - b \mid e_k) + \frac{t}{2}(Ae_k \mid e_k) \ ,$$

et il en résulte clairement l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, égale à $\left(Ax - b \mid e_k\right)$.

7 On sait qu'en base orthonormée les composantes d'un vecteurs s'expriment par les produits scalaires avec les vecteurs de base, donc, vu la définition de g et le calcul ci-dessus, on a $g(x) = A.x - b$.

8 Cela a été vu en **1.** : par **5.**, $I(x,u) = \dfrac{1}{2}(Au \mid u)$ où la matrice $\dfrac{1}{2}A$ est symétrique définie positive, donc l'encadrement $r\|u\|^2 \leq I(x,u) \leq s\|x\|^2$ a lieu pour r,s respectivement égaux à l'inf et au sup des valeurs propres de $\dfrac{1}{2}A$.

9 <u>Condition nécessaire</u> : un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ est a fortiori un minimum local et par théorème ($\mathbb{R}^n$ est un ouvert !), c'est nécessairement un point critique.
<u>Condition suffisante</u> : si $g(x) = 0$, on a pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, puisque $I(x,u) \geq 0$, $f(x+u) = f(x) + I(x,u) \geq f(x)$, donc $f(x)$ est un minimum absolu.

10 En appliquant le calcul du **5.** au vecteur $u = -\alpha.g(x) = -\alpha(Ax - b)$, on obtient (par **1.** et dfinition de l_n) :

$$f\big(x - \alpha g(x)\big) - f(x) = -\alpha\big(g(x) \mid g(x)\big) + \frac{\alpha^2}{2}\big(Ag(x) \mid g(x)\big) \leq \Big(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2} l_n\Big).\|g(x)\|^2 \ .$$

L'hypothèse $0 < \alpha < \dfrac{2}{l_n}$ entraîne $-\alpha + \dfrac{\alpha^2}{2} l_n < 0$, donc $f\big(x - \alpha g(x)\big) - f(x) \leq 0$ (l'ingalit est mme stricte sauf si $g(x) = 0$).

11 L'algorithme consiste à prendre un $y^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque (par exemple $y^0 = 0$) puis de définir (y^k) par la relation $y^{k+1} = y^k - \alpha.g(y^k)$, α choisi comme précédemment. On obtient ainsi une suite (y^k) telle que $f(y^k)$ soit strictement décroissante. On remarque que cette suite est en fait exactement celle définie au **4.**, puisque $g(x) = Ax - b$. Elle converge donc vers $z = A^{-1}b$, qui vérifie $g(z) = 0$. Par **9.**, f admet bien un minimum en $z = \lim y^k$ dans ce cas.

1.2 Deuxième partie

12 Par **1.** on a une inégalité de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ r.\|x\|^2 \leq \dfrac{1}{2}(Ax \mid x)$, $r = \dfrac{1}{2} \min\limits_{l \in sp(A)} l$ étant strictement positif. De plus, par Cauchy-Schwarz, $(b \mid x) \leq \|b\|.\|x\|$. D'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ f(x) \geq \|x\|.(r.\|x\| - \|b\|) \ .$$

Comme la fonction au membre de droite $z \mapsto h(z) = z(rz - \|b\|)$ tend vers $+\infty$ quand $z = \|x\| \to \infty$, la propriété demandée est clairement vérifiée.

13 C'est la propriété précédente, appliquée à $c = f(y)$, et restreinte aux vecteurs x de F .

14 Un sous-espace vectoriel étant non vide, soit $y \in F$ fixé. Par ci-dessus, r étant choisi tel que $\|x\| \geq r \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, le minimum de $f_{|F}$ est à chercher dans $K = F \Cap \bar{B}(0,r)$. Or, en dimension finie, un sous-espace vectoriel est un fermé, ainsi qu'une boule fermée, et de même pour leur intersection. Donc K , fermé et borné d'un espace vectoriel de dimension finie, est compact. f est une application continue (car polynômiale en les composantes), donc elle admet un minimum $\bar{x}$ atteint sur K , cqfd.

15 Admettons f convexe, et supposons l'existence de 2 minimums $\bar{x} \neq \bar{y}$ à $f_{|F}$. Déjà, par double inégalité, $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Puis, pour $l = 1/2$, par exemple, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \ ,$$

ce qui, puisque $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}$ reste dans F, contredit que $\bar{x}$ est un minimum pur $f_{|F}$. Donc le minimum, qui existe par **14.**, est unique. *Remarque : f est la somme d'une fonction quadratique $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax \mid x)$ et d'une fonction linéaire $x \mapsto -(b \mid x)$. Une fonction linéaire étant évidemment convexe (au sens large), la stricte convexité de f résulte de celle de $x \mapsto (Ax \mid x)$. Or celle-ci découle simplement de la définie positivité de la matrice symétrique A. On a en effet, pour tout $l \in]0,1[$ et pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$:*

$$\left\{\begin{array}{ll} & (A((1-l)x+ly) \mid (1-l)x+ly) \overset{?}{<} (1-l)(Ax \mid x) + l(Ay \mid y) \\ \iff & l(1-l)(Ax \mid x) - 2l(1-l)(Ax \mid y) + l(1-l)(Ay \mid y) \overset{?}{>} 0 \\ \iff & l(1-l)(A(x-y) \mid x-y) \overset{?}{>} 0 \ , \end{array}\right.$$

et cette dernière inégalité est acquise par hypothèse sur l et définie- positivité de A.

16 g, calculé à la question **7.**, est le gradient de f, et on sait que, pour tout vecteur u, $\frac{\partial f}{\partial u}(y) = df_y(u) = (g(y) \mid u)$. Or, $\frac{\partial f}{\partial u}(y)$ représente la dérivée en $t = 0$ de la fonction $\varphi : t \mapsto f(y + t.u)$, donc si $y \in F$ est un minimum pour $f_{|F}$, et si $u \in F$, φ admet un minimum absolu en 0. Il en résulte bien $0 = \varphi'(0) = (g(y) \mid u) = (Ay - b \mid u)$.
Réciproquement, si $Ay - b$ est orthogonal à F, on a comme à la question **9.** que $\forall u \in F \ \ f(y+u) - f(y) = I(y,u) = \frac{1}{2}(Au \mid u) \geq 0$, et $f(y)$ est bien un minimum de $f_{|F}$.

17 On a donc $(A\bar{x} - b \mid \bar{x}) = 0$, soit $(A\bar{x} \mid \bar{x}) = (b \mid \bar{x})$. De l'expression de f on déduit alors

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(A\bar{x} \mid \bar{x}) = -\frac{1}{2}(b \mid \bar{x}) \ .$$

2 Problème 2 : Corrigé Pr Boujaida Sadik

2.1 Question Préliminaire :

1 Si g de classes $\mathcal{C}^1$ sur une partie V définie par une équation de type $f(x) = 0$ où f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et si g admet sur V un extremum en un point $a \in V$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dg_a = \lambda df_a$.

2 $dg_a(h) = 2\,(a|h)$.

3 .

2.2 Première partie :

N.B : Pour les élèves marocains, programme 2009, x est un extrémum de f selon la contrainte $\|x\|^2 = 1$, la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ ayant pour gradient en x le vecteur $2x$, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{grad} f(x) = 2\mu x$, soit $df_x(h) = 2\mu\langle x, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

C'est un fruit qui vous est défendu dès que votre copie est destinée à passer les frontières.

4 La fonction $g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et la sphère unité S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, g est donc bornée et atteint ses bornes sur S^{n-1}.
Soit x un extrémum de g. D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dg_x(h) = \lambda df_x(h)$.

5 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. $f : x \longmapsto \langle x, Ax\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n$.

a f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée des applications $x \longmapsto (x, Ax)$ qui est linéaire et du produit scalaire qui est bilinéaire.
Pour le calcul de la différentielle, mieux vaut ici utiliser la définition.
$f(x+h) - f(x) = \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle h, Ah\rangle = 2\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle$.
L'application $h \longmapsto 2\langle Ax, h\rangle$ est linéaire et $\langle Ah, h\rangle \leq \|A\|\,\|h\|^2$ donc $\langle Ah, h\rangle = o(\|h\|)$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle$$

b Soit x un extrémum de la restriction de f sur S^{n-1}.
D'après (4.) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle = \lambda\langle x, h\rangle$$
Nous avons donc $Ax = \dfrac{\lambda}{2}x$. x est donc un vecteur propre de A.

N.B : Nous venons de démontrer que toute matrice carrée symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle, étape essentielle dans la démonstration du théorème spectrale.

2.3 Deuxième partie

6 **a** Archi-connu.

b Idem.

c Nous allons noter $\langle A, B\rangle$ le produit scalaire $\mathrm{tr}\,{}^tAB$.
Une démarche similaire à celle suivie en (5.) permet de justifier que l'application $q : M \longmapsto \langle M, M\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ dq_M(H) = 2\langle M, H\rangle = 2\mathrm{tr}\,{}^tMH$$

7 La linéarité du déterminant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne permet d'écrire
$$\det(M + tE_{ij}) = \det M + t\Delta_{ij}(M)$$
où $\Delta_{ij}(M)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i, j) de M.
La fonction $t \longmapsto \det(M + tE_{ij})$ est donc dérivable et sa dérivée est constante de valeur $\Delta_{ij}(M)$. Ce qui signifie que l'application f admet une dérivée partielle en M selon le coefficient a_{ij} d'indice (i, j) de M et que
$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(M) = \Delta_{ij}(M).$$
Les applications Δ_{ij} sont des fonctions polynomiales des coefficients de M et sont donc continues donc $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ est continue. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\forall H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ df_M(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\Delta_{ij}(M) = \mathrm{tr}\,{}^t\widetilde{M}H$$

8 $SL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application continue **det** du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé.
g étant positive l'ensemble $I = \{g(M)/M \in SL_n(\mathbb{R})\}$ admet une borne inférieure que nous allons noter δ. En utilisant la caractérisation de la borne inférieure on prouve l'existence d'une suite d'éléments $(\alpha_n)_n$ de I qui converge vers δ. Considérons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément A_n de $SL_n(\mathbb{R})$ tel que $g(A_n) = \|A_n\|^2 = \alpha_n$.

La suite $(\|A_n\|^2)_n$ est convergente donc $(A_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, elle admet au moins une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Posons $A = \lim A_{\varphi(n)}$. Par continuité de g, $\left(g(A_{\varphi(n)})\right)_n$ converge vers $g(A)$ et donc $\delta = g(A)$. Comme $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé alors $A \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ et donc $\delta \in I$.
g admet donc un minimum absolue en A sur $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$.

9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $\rho : t \longmapsto \det(e^{tM}), t \in \mathbb{R}$.
ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= df_{e^{tM}}\left(\frac{d}{dt}e^{tM}\right) = df_{e^{tm}}\left(Me^{tM}\right) \\
&= \mathrm{tr}\,{}^t\mathbf{Com}(e^{tM})Me^{tM} = \mathrm{tr}\,{}^t\mathbf{Com}(e^{tM})e^{tM}M \\
&= \mathrm{tr}\det(e^{tM})M \\
&= \det(e^{tM})\mathrm{tr}M
\end{aligned}$$

Ainsi ρ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \mathrm{tr}My = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \rho(t) = \lambda e^{t\mathrm{tr}M}$.
Comme $\rho(0) = \det(e^0) = \det(I_n) = 1$ alors $\lambda = 1$. Pour $t = 1$ nous obtenons alors

$$\det(e^M) = e^{\mathrm{tr}M}.$$

10 $M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $df_M(H) = 0$ et $\gamma : t \longmapsto Me^{tM^{-1}H},\ t \in]-1,1[$.
Soit $t \in]-1,1[$
$\det\left(\gamma(t)\right) = \det M \det\left(e^{tM^{-1}H}\right) = e^{t\mathrm{tr}M^{-1}H} = e^{t\det(M)\mathrm{tr}\,{}^t\widetilde{M}H} = e^{t df_M(H)} = 1.$
donc γ est à valeurs dans $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\gamma'(t) = M(M^{-1}H)e^{tM^{-1}H} = He^{tM^{-1}H}$$

En particulier $\gamma(0) = M$ et $\gamma'(0) = H$.

11 **a** En considérant la fonction $g \circ \gamma$, γ étant la fonction définie dans la question précédente et qui vérifie

$$\gamma(0) = M,\ \gamma'(0) = H \text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \|\gamma(t)\| = 1$$

comme dans (4.), on démontre que si M est un extrémum de g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ dq_M(H) = \lambda df_M(H)$$

Il est alors trivial que si $df_M(H) = 0$ alors $dq_M(H) = 0$.

b $M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^t\widetilde{M} = M^{-1}$ et donc

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ df_M(H) = \mathrm{tr}M^{-1}H = \langle {}^tM^{-1}, H\rangle \text{ et } dq_M(H) = 2\langle M, H\rangle$$

La relation $dq_M = \lambda df_M$ donne alors

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle {}^tM^{-1} - 2\lambda M, H\rangle = 0$$

et donc ${}^tM^{-1} = 2\lambda M$. En appliquant le déterminant nous obtenons $(2\lambda)^n = 1$ et donc $2\lambda = \pm 1$.
Ainsi ${}^tMM = \pm I_n$, mais ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, ses valeurs propres sont donc positives et donc nous ne pouvons avoir ${}^tMM = -I_n$.
Alors ${}^tMM = I_n$ ie que M est ume matrice orthogonale.

Maintenant, M étant orthogonale, ses vecteurs colonnes sont unitaires donc $q(M) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = n$.

À la prochaine