.

Mamouni My Ismail

Devoir surváillé N°4 bis

Espaces vectoriels euclidiens Calcul différentiel

MP-CPGE Rabat

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Blague du jour

● Une logicienne (spécialiste en logie) vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.
● Nous sommes dans le bateau des fonctions. Brusquement, le capitaine Factoriel s'exclame : On dérive, on dérive ! (on risque de se noyer). Les fonctions s'affolent, surtout la constante. Mais l'exponentielle réplique : Bof, moi on ne me dérive jamais.
● La vie est complexe, elle a une face réelle et une autre imaginaire.

Leonhard Euler (1707-1783)

Mathématicien et un physicien suisse. Complétement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moiti de son travail durant cette période. Euler fut profondément pieux pendant toute sa vie, il répondait souvent cette anecdote : $e2i\pi + 1 = 0$, donc Dieu existe. Certains scientifiques ont appelé cette identité la formule la plus remarquable du monde . Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* en 1739 qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musique ; une biographie commente que le travail est destinée à des musiciens trop avancés dans leurs mathématiques et à des mathématiciens trop musicaux. Dans les sciences économiques, il prouve que si chaque facteur de production est payé à la valeur de son produit marginal, alors (sous des rendements à l'échelle constants) le revenu total et le rendement seront complétement épuisés.

Mathématicien du jour

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Problème 1 : CCP 2003, MP, Math 2

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1.1 Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t\mathbf{A}$ est sa matrice transposée, $\mathrm{rang}(A)$ son rang et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.
I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.
Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

1.2 Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,
dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.
La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

1.3 Exercice préliminaire

1 1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2 2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

1.4 Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3 3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf\limits_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

4 4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5 5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6 6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

1.5 Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

a Théorème de la décomposition polaire

7 7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8 8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9 9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, ..d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, .., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?
b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.
c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10 10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = D^2$.
b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11 11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

b Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12 12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13 13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
b. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

14 14. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D-\Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\mathrm{Tr}(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(D\Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15 15. Montrer que , $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16 16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

2 Problème 2 : CNC 2003, TSI, Math 1

Sur l'équation des cordes vibrantes

Dans ce problème, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$) désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et c est un réel strictement positif.

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

où $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction inconnue élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

A- Résolution par la méthode de D'Alembert

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$; montrer que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} = 0$ si et seulement s'il existe deux fonctions F et G, éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout couple (u,v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u,v) = F(u) + G(v)$.
2. Soit $\Psi : (x,t) \mapsto (u,v) = (x - ct, x + ct)$.
   (a) Vérifier que Ψ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, Φ désigne l'automorphisme réciproque de Ψ.
   (b) Prouver que l'application $\Theta : f \mapsto f^* = f \circ \Phi$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de (I).
   (a) Calculer $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$, puis $\dfrac{\partial^2 f^*}{\partial v \partial u}$.
   (b) En déduire que f est de la forme $f : (x,t) \mapsto F(x-ct) + G(x+ct)$ où F et G sont deux éléments quelconque de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
4. Soit φ un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, solution de (I), que l'on exprimera en fonction de φ, satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = \varphi(x) & \text{(position initiale au temps } t=0) \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{(corde au repos au temps } t=0) \end{array} \right.$$

.

B- Solutions stationnaires vérifiant des conditions aux limites

Une solution f de (I) est dite stationnaire s'il existe deux fonctions g et h de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,t)=g(x)h(t).$$

1. Soit λ une constante réelle. On suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant le système

$$(S_\lambda)\ \begin{cases} g''=\lambda g\\ h''=\lambda c^2 h\end{cases}$$

   Établir que la fonction $f:\ (x,t)\mapsto g(x)h(t)$ est solution de (I).

2. Réciproquement, on suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tels que la fonction $(x,t)\mapsto g(x)h(t)$ soit une solution de (I) non identiquement nulle.
   Prouver l'existence d'un réel λ tel que g et h soient solution du système (S_λ).

3. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y''=\mu y$ selon les valeur du réel μ.
   On distinguera les trois cas $\mu=0,\ \mu>0$ et $\mu<0$.
   (b) Déterminer tous les réels μ de sorte que l'équation différentielle $y''=\mu y$ admette une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition aux limites $y(0)=y(a)=0$.
   Expliciter l'ensemble des solutions correspondant à chacune de ces valeurs de μ.
   (c) Déterminer alors l'ensemble des solutions stationnaires f de (I) vérifiant la condition aux limites

$$(2)\quad \forall\,t\in\mathbb{R},\ f(0,t)=f(a,t)=0.$$

3 Exercice : e3a 2007, MP, Math 2

.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.

   1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

   1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

   1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

   1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h, k) \longmapsto f(1 + h, k)$ au voisinage de $(0, 0)$. Le point $(1, 0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?

   1e). De même, le point $(-1, 0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.

   1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.

2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

   2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.

   2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

   2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.

   2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.

Bonne Chance