.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir survéillé N°4 bis

Espaces vectoriels euclidiens Calcul différentiel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Exercice : démontrer que tous les nombres impairs sont premier.
- Le chimiste commence : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier... bah, c'est vrai !
- L'architecte essait aussi : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier, 11 est premier... mais oui, c'est vrai !
- Le mathématicien réplique : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est PAS premier... ça marche pas vôtre truc !
- L'informaticien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier.. 9 est premier.. 9 est premier...

André-Louis Cholesky (1875-1918)

Mathématicien du jour

Polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Il est célèbre pour sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, toujours intensément utilisée de nos jours.
Durant la Première Guerre mondiale, il participe à l'amélioration d'une cartographie nécessaire à la préparation des tirs. De septembre 1916 à février 1918, il est directeur technique du service géographique de l'armée en Roumanie, où il est Lieutenant-Colonel.
Affecté en juin 1918 dans l'armée, il décède le 31 août 1918 des suites de blessures reçues sur le champ de bataille.

1 Corrigé CCP 2003, MP, Math 2, Pr Legros

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. On obtient directement :

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_3 + 5\,J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

J est clairement de rang 1, donc 0 est valeur propre double de J, la troisième valeur propre étant égale à 3 puisque $\mathbf{Tr}(J) = 3$. Comme $(1,1,1)$ est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3, posons

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de J est alors l'orthogonal de e_1. Nous posons donc $e_2 = d\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2 = d\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, pour obtenir $P^{-1}HP = I_3 + 5d\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = D^2$ avec $P = d\begin{pmatrix}d\frac{\sqrt{3}}{3} & d\frac{\sqrt{2}}{2} & d\frac{\sqrt{6}}{6}\\ d\frac{\sqrt{3}}{3} & -d\frac{\sqrt{2}}{2} & d\frac{\sqrt{6}}{6}\\ d\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -d\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ et $D = d\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Comme S est inversible (les valeurs propres de S sont égales à celles de D), on peut poser $U = \Gamma S^{-1}$. Nous avons ensuite ${}^tUU = {}^tS^{-1}\,{}^t\Gamma\Gamma S^{-1} = S^{-1}HS^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PDP^{-1} = I_3$ et U est bien orthogonale. Il reste à calculer U :

$$U = \Gamma PD^{-1}\,{}^tP = \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

3. On a, pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A \mid \quad b = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

L'application $(\ \mid\ )$ est donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique est une base orthonormale.

4. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M = d\frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$ avec $d\frac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $d\frac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, les deux espaces sont supplémentaires. Ils sont également orthogonaux car, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid S) = \mathrm{Tr}\left({}^tAS\right) = -\mathrm{Tr}\,(AS) = -\mathrm{Tr}\,(SA) = -\mathrm{Tr}\left({}^tSA\right) = -(S \mid \quad a,$$

et donc $(A \mid S) = 0$.

5. Si A est une matrice quelconque, la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à la distance de A au projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit encore à la norme du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui est exactement le résultat demandé. Par symétrie, on a $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left|\left|\frac{1}{2}(A + {}^t \quad a\right|\right|$.

6. On a facilement $d\frac{\Gamma + {}^t\Gamma}{2} = \begin{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$ puis $d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le théorème de réduction des matrices symétriques permet d'affirmer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = PS{}^tP$ soit diagonale. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons donc :

$${}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

en notant λ_i les termes diagonaux de D (i.e. les valeurs propres de S) et y_i les coefficients de la matrice colonne PX. Ainsi, il faut et il suffit que les λ_i soit tous positif pour que S soit positive puisque PX décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$.

8. La matrice ${}^tAA$ est clairement symérique et ${}^tX({}^tA \quad a\, X = {}^t(AX)(AX) = ||AX||^2 \geq 0$ pour tout X (en notant $||\ ||$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$). Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ est donc symétrique et positive.

9. a ${}^tA_iA_j$ est le coefficient d'indice (i,j) de la matrice ${}^tAA$: il est donc nul si $i \neq j$ et égal à d_i^2 si $i = j$. En particulier, si $d_i = 0$, $||A_i||^2 = {}^tA_iA_i = d_i^2 = 0$ et la colonne A_i est nulle.

b Notons I l'ensemble des i tels que $e_i \neq 0$ et, pour chaque $i \in I$, posons $E_i = \dfrac{A_i}{||A_i||} = \dfrac{A_i}{d_i}$. La famille $(E_i)_{i\in I}$ est alors une famille orthonormale, que nous pouvons complétée en une base orthonormale $(E_i)_{1\leq i\leq n}$. Comme $d_i = 0$ et $A_i = 0$ pour $i \notin I$, l'égalité $A_i = d_iE_i$ est vraie pour tout i.

c Soit E la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $(E_i)_{1\leq i\leq n}$. Cette base étant orthonormale, E est une matrice orthogonale et $A_i = d_iE_i$ pour tout i se traduit par $A = ED$.

10. **a** ${}^tAA$ est symétrique réelle, donc il existe P orthogonale telle que $P^{-1}\,{}^tAAP$ soit diagonale. D'autre part, ${}^tAA$ est positive donc ses valeurs propres sont positives (questions **7** et **8**). On en déduit que $D = P^{-1}\,{}^tAAP = P^{-1}\,{}^tBBP$ est une matrice diagonale à termes positifs.

b On déduit de la question **9c** qu'il existe deux matrices orthogonales E et F telles que $A = ED$ et $B = FD$, ce qui donne $A = UB$ avec $U = EF^{-1}$, qui est bien orthogonale.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tAA$ est symétrique positive, il existe $P \in \mathcal{O}n$ et D diagonale positive telle que ${}^tAA = {}^tPD^2P$, que l'on peut écrire ${}^tAA = {}^tSS$ où $S = {}^tPDP$ est symétrique positive. On déduit de la question précédente qu'il existe U orthogonale telle que $A = US$, ce qui est le résultat demandé.

12. Nous avons :

$$||\Omega M||^2 = \text{Tr}\left({}^tM\Omega\,{}^t\Omega M\right) = \text{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2$$

et en utilisant la propriété classique $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$:

$$||M\Omega||^2 = \text{Tr}\left({}^t\Omega\,{}^tMM\Omega\right) = \text{Tr}\left({}^tMM\Omega\,{}^t\Omega\right) = \text{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2,$$

ce qui donne bien $||\Omega M|| = ||M\Omega|| = ||M||$.

13. **a** On a $||A - \Omega|| = ||US - \Omega|| = ||U(S - U^{-1}\Omega)|| = ||S - U^{-1}\Omega||$ d'après la question **12**.

Quand Ω décrit $\mathcal{O}n$, $U^{-1}\Omega$ décrit également $\mathcal{O}n$, donc $d(A, \mathcal{O}n) = d(S, \mathcal{O}n)$.

b Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}n$, nous avons $||S - \Omega|| = ||PDP^{-1} - \Omega|| = ||P(D - P^{-1}\Omega P)P^{-1}|| = ||D - P^{-1}\Omega P||$ car $P, P^{-1} \in \mathcal{O}n$. Une nouvelle fois, $P^{-1}\Omega P$ décrit $\mathcal{O}n$ quand Ω décrit $\mathcal{O}n$ donc

$$d(A, \mathcal{O}n) = d(S, \mathcal{O}n) = d(D, \mathcal{O}n).$$

14.

a $||D - \Omega||^2 = \text{Tr}\left({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)\right) = \text{Tr}\left(D^2 - {}^t\Omega D - D\,{}^t\Omega + I_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\text{Tr}(D\Omega) + n.$

b En notant $d_{i,j}$ et $\omega_{i,j}$ les termes génériques de D et de Ω, nous obtenons :

$$\text{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\omega_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

car Ω étant orthogonale, les $\omega_{i,j}$ sont éléments de $[-1, 1]$

c On en déduit que pour tout $\Omega \in \mathcal{O}n$:

$$||D - \Omega||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2 = ||D - I_n||^2.$$

Comme $I_n \in \mathcal{O}n$, ceci prouve que la distance de D à $\Omega \in \mathcal{O}n$ est minimale pour $\Omega = I_n$.

15. Nous venons de démontrer que $d(A, \mathcal{O}n) = d(D, \mathcal{O}n) = d(D, I_n) = d\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - 1)^2}$, où les λ_i sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$, appelées *valeurs singulières* de A.

16. Nous avons ici $n = 3$, $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, donc $d(\Gamma, \mathcal{O}n) = 3$.

2 Corrigé e3a 2007, MP, Math 2, Pr Deyris

1a) La fonction f est un polynôme en x et y, donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3{x_0}^2 - 3(1 + {y_0}^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -6x_0 y_0$.

1c) C'est immédiat.

1d) On a, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$: $f(1 + h, k) = (1 + 3h + 3h^2 + h^3) - 3(1 + h)(1 + k^2) = -2 + 3h^2 - 3k^2 + h^3 - 3hk^2$.
Prenons pour norme sur $\mathbb{R}^2$ la norme définie par $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ (les normes sur $\mathbb{R}^2$ étant toutes équivalentes, le choix de la norme n'influe pas sur le résultat). On a alors, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $|h| \leq \|(h, k)\|$ et donc $|h^3| \leq \|(h, k)\|^3 = o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$; de même, $hk^2 = o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$. Par suite, toujours au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(1 + h, k) = -2 + 3(h^2 - k^2) + o(\|(h, k)\|^2)$$

La forme quadratique $q : (h, k) \longmapsto 3(h^2 - k^2)$ n'a pas un signe constant (par exemple $q(1, 0) > 0$ et $q(0, 1) < 0$) ; on sait qu'alors f ne présente pas d'extremum en $(1, 0)$.

1e) De même, on a $f(-1 + h, k) = 2 - 3(h^2 - k^2) + o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$. Pour les mêmes raisons qu'en **1d)**, f ne présente pas d'extremum en $(-1, 0)$.

1f) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f. Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite f n'a pas d'extremum local.

2a) La fonction g, restriction de f à D, est continue sur D. De plus, D est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (image réciproque du fermé $[0, 1]$ par l'application continue $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$), et est clairement borné ; c'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$.
On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; donc g a un maximum A en un point de D, et un minimum a en un point de D.

2b) Supposons que A soit atteint en un point (x_0, y_0) de $D' = D \setminus C$. Alors la restriction de g à D' présenterait un maximum en (x_0, y_0). De plus, D' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est le disque unité ouvert) et g est C^1 sur D' ; donc (x_0, y_0) serait un point critique de g, donc de f.
Or on a vu que les seuls points critiques de f sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, qui n'appartiennent pas à D' ; les extremums de g ne peuvent donc pas être atteints en un point de D', ils le sont donc forcément sur C.

2c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(\cos t, \sin t) = \cos^3 t - 3\cos t(2 - \cos^2 t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$.
Quand t décrit $\mathbb{R}$, $\cos t$ décrit $[-1, 1]$. Étudions donc les variations de $\varphi : u \longmapsto 2u(2u^2 - 3)$ sur $[-1, 1]$. On a, pour tout $u \in [-1, 1]$, $\varphi'(u) = 6(2u^2 - 1)$ d'où le tableau de variations :

u	-1		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi(u)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

Puisque $(\cos t, \sin t)$ décrit C quand t décrit $\mathbb{R}$, et que $g(\cos t, \sin t) = \varphi(\cos t)$ pour tout t, le maximum de g sur C est atteint en chaque point $(\cos t, \sin t)$ pour lequel $\varphi(\cos t)$ est maximal, c'est à dire pour lequel $\cos t = -1/\sqrt{2}$. Par suite $A = 2\sqrt{2}$, et est atteint en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$.

2d) De même, $a = -2\sqrt{2}$ et est atteint en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$.

À la prochaine