Devoir Libre

21 Formule de Green-Rieman & Intégrale de Dirichlet

Blague du jour

On raconte qu'une secrétaire d'une société dont je tairais le nom avait insérer le cd dans son pc avec la pochette en plastique transparent.
Elle pensait que ça protégeait des virus ...

Mathématicien du jour

George Green (1793-1841)

Physicien britannique, auteur d'un Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme en introduisant plusieurs concepts importants, parmi lesquels les fonctions potentielles. Sa particularité est qu'il était presque totalement autodidacte, il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans et a travaillé longtemps dans le moulin qu'il a hérité de son père.

Suite Il l'intégra l'université de Cambridge comme étudiant à l'âge de 40 ans. Il écrivit des publications dans le domaine de l'optique, de l'acoustique et de l'hydrodynamique. C'est surtout à Lord Kelvin, qui le fit connaître, qu'il doit sa renommée.

Énoncé : e3a 2009, PSI

Applications simples du cours.

Rappels.
Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On considère $V : (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté plan de paramétrage : $t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I, parcouru dans le sens des t croissants.
On rappelle que la circulation de V le long de γ, notée $\int_\gamma V$ se calcule par la formule

$$\int_\gamma V = \int_\gamma (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U. L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U.
On rappelle la formule de **Green-Riemann** :

$$\int_\gamma V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

1. Dans cette question seulement, on prend $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x^2 \text{ et } y^2 \leq x\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.
   1.1. Représenter le domaine G et γ.
   1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\displaystyle\int_\gamma V$ avec
   $$P : (x,y) \mapsto 2xy - x^2 \text{ et } Q : (x,y) \mapsto x + y^2$$
   1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.
   2.1. Que vaut $\displaystyle\int_\gamma V$?
   2.2. Donner un exemple de champ de vecteur V, non identiquement nul, et vérifiant la propriété :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$
3.
   3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes : $A_1 = \displaystyle\int_\gamma x\ dy$, $A_2 = -\displaystyle\int_\gamma y\ dx$ et $A_3 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\gamma (x\ dy - y\ dx)$ sont égales. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques
   $$t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{pmatrix}$$
   dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.
   On précisera les tangentes aux points singuliers.
   3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ.

Problème.

Préliminaires.

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ est convergente.
   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.
   2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.
   2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi : x \mapsto \phi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\ dt$.
   Montrer que l'on a : $\forall x > 1,\ \phi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt$.
   2.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
   2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$ est convergente.

Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Soient les deux fonctions :

$$P : (x,y) \mapsto P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}[x\sin(x) - y\cos(x)]$$

$$Q : (x,y) \mapsto Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}[x\cos(x) + y\sin(x)]$$

et V le champ de vecteurs : $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbb{R}^2$ ne cotenant pas l'origine.
2. Soit γ un arc paramétré sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique. Démontrer que $\int_\gamma V = 0$.
3. On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho > 0$ paramétré par $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et on note A_ρ l'intégrale
$$A_\rho = \int_\Gamma (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy)$$
   - 3.1. Montrer que $A_\rho = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin(\theta)} \cos(\rho\cos(\theta))\,d\theta$.
   - 3.2. Calculer $\lim_{\rho\to 0^+} A_\rho$.
   - 3.3. Montrer que $\lim_{\rho\to+\infty} A_\rho = 0$. On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.
4. Soient r et R deux réels tels que $0 < r < R$. On considère l'arc γ constitué par :

   γ_1 : le segment $[A_1, A_2]$ où $A_1 = (r,0)$et $A_2 = (R,0)$,

   γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3 = (0,R)$,

   γ_3 : le segment $[A_3, A_4]$ où $A_4 = (0,r)$,

   γ_4 : le quart de cercle de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1.
   - 4.1. Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ direct.
   - 4.2. Montrer que $\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
   - 4.3. Montrer que $\int_{\gamma_1} V\,dt = 0$.
   - 4.4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,dt$.

1.
   - 1.1. Vérifier que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - 1.2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.
2. Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $m \in N$, $H_m = \int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\,dt$.
Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim_{m\to+\infty} H_m = 0$.
Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

3. Montrer que la fonction $h : t \mapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4.
 4.1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
 4.2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Soit $u \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $\Delta = [0,u] \times [0,u]$ et $J = \iint_\Delta \sin(x)e^{-xy}\,dxdy$.

1. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)e^{-\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2. En utilisant l'intégrale J, montrer que
$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}\left(1 - e^{ux}\right)\,dx = \int_0^u \frac{1 - e^{yu}(\cos(u) + y\sin(u))}{1+y^2}\,dy$$

3. On note alors $K_1 = \int_0^u e^{-xu}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ et $K_2 = \int_0^u \frac{y\sin(u)+\cos(u)}{1+y^2}e^{-yu}\,dy$.
 3.1. Prouver que $\lim_{u\to+\infty} K_1 = 0$.
 3.2. En utilisant une majoration, déterminer $\lim_{u\to+\infty} K_2$.
 3.3. Retrouver alors la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

4.
 4.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ est convergente.
 4.2. En utilisant ce qui précède, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.

FIN FIN

Á la prochaine