Corrigé Problème II : Pr. Patte

① Soit $x \in]0,2\pi[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $2\mathrm{e}^{-t^2}$, donc intégrable sur $[0,+\infty[$ et *a fortiori* sur $]0,+\infty[$.

① Soit $x \in]0,2\pi[$. Alors, sur $[1,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t^2)-1}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t^2)-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (même preuve que pour l'existence de $I(x)$), on obtient l'encadrement $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2)-1}$. Donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x}$ est bornée sur $]0,2\pi[$.

② Au voisinage de 0, $\operatorname{ch}(t^2) = 1 + \dfrac{t^4}{2} + \dfrac{t^8}{24} + o(t^4)$.

On en déduit $\dfrac{\frac{t^4}{2}+1-\operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2)-1)} \underset{0}{\to} -\dfrac{1}{6}$. Donc $t \mapsto \left|\dfrac{\frac{t^4}{2}+1-\operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2)-1)}\right|$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

③ Les deux intégrales existent (par continuité des fonctions sur $[0,1]$).

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{t^4}{2}-\cos^2 x}\right| = \left|\int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2}\ \ldots}{\left(1+\frac{t^4}{2}-\mathrm{co}\ldots\right.}\right.$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2}\ \ldots}{\left(1+\frac{t^4}{2}-\mathrm{co}\ldots\right.}$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2}+1\ \ldots}{\left(1+\frac{t^4}{2}-1\right.\ldots}$$

La majoration est possible du fait de la continuité de la fonction sous l'intégrale sur $[0,1]$ et montre le caractère borné de $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2)-\cos^2 x} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{t^4}{2}-\cos^2 x}$.

④ Avec le changement de variable affine proposé :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{t^4}{2}-\cos^2 x} = \frac{2}{(2(1-\cos x))^{3/4}} \int_0^{\frac{1}{(2(1-\cos x))^{1/4}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u\ldots}$$

La suite du calcul de l'intégrale est parfaitement inutile pour obtenir un équivalent de $I(x)$.

Quand x tend vers 0^+, $\dfrac{1}{(2(1-\cos x))^{1/4}}$ tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{(2(1-\cos x))^{1/4}}} \frac{du}{1+u^4}$ tend vers $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

De plus, $2(1-\cos x) \underset{0}{\sim} x^2$, donc $\dfrac{2}{(2(1-\cos x))^{3/4}} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^{3/2}}$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+\frac{t^4}{2}-\cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\frac{1}{x^{3/2}}$. D'après 1.c, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{ch}(t^2)-\cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\frac{1}{x^{3/2}}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t^2)-\cos^2 x}$ est bornée sur $]0,+\infty[$, $I(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{x^{3/2}}$.

② Par changement de variable affine sur une intégrale convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt \overset{u=nt}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{\sqrt{n}}\Gamma(1/2)$, donc $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt$.

③ ①

$$\sum_{n=1}^{N} e^{n(-t+ix)} = e^{-t+ix}\frac{1-e^{N(-t+ix)}}{1-e^{(-t+ix)}} = e^{-t+ix}\frac{\left(1-e^{N(-t+ix)}\right)\left(1-e^{(-t-ix)}\right)}{\left(1-e^{(-t+ix)}\right)\left(1-e^{(-t-ix)}\right)}$$
$$= e^{-t+ix}\frac{\left(1-e^{N(-t+ix)}\right)\left(1-e^{(-t-ix)}\right)}{(1-e^{-t}\cos x)^2+e^{-2t}\sin^2 x}.$$

Après simplification, la partie imaginaire vaut

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}\sin(nx) = \frac{e^{-t}\left(\sin x - e^{-Nt}\sin((N+1)x)+e^{-(N+1)t}\sin(Nx)\right)}{(1-e^{-t}\cos x)^2+e^{-2t}\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x - e^{-Nt}\sin((N+1)x)+e^{-(N+1)t}\sin(Nx)}{2(\mathrm{ch}t-\cos x)}$$

② $\displaystyle S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} e^{-nt}\sin(nx)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x - e^{-Nt}\sin((N+1)x)+e^{-(N+1)t}\sin(Nx)}{2(\mathrm{ch}t-\cos x)\sqrt{t}}\,dt$ semble converger vers $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2(\mathrm{ch}t-\cos x)\sqrt{t}}\,dt \overset{u=\sqrt{t}}{=} \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\mathrm{ch}(u^2)-\cos x}$.

On peut démontrer ce résultat à l'aide du théorème de convergence dominée ou par simple majoration :

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{-e^{-Nt}\sin((N+1)x)+e^{-(N+1)t}\sin(Nx)}{2(\mathrm{ch}t-\cos x)\sqrt{t}}\,dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{-e^{-Nt}\sin((N+1)x)+e^{-(N+1)t}\sin(Nx)}{2(\mathrm{ch}t-\cos x)\sqrt{t}}\right|dt \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{e^{-Nt}+e^{-(N+1)t}}{2(1-\cos x)\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1-\cos x)}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

converge vers 0.

④ Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}I(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\pi}}.\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\frac{1}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.