Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Mathématicien et physicien suisse, il fit d'importantes découvertes dans le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Mathématicien du jour

## Problème I : Extrait CCP 2006, MP

Si l'on rentre sur un logiciel de calcul formel l'instruction :

sum(1/(n^2-α^2), n=1..infinity);

on obtient le résultat suivant :

$$-\frac{1}{2}\frac{\psi(1-\alpha)}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\psi(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Un des objectifs du problème qui comporte trois paragraphes est de démontrer la formule correspondante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{\psi(1+\alpha)-\psi(1-\alpha)}{2\alpha}$$

où $\alpha \in ]0,1[$ et $\psi$ est une fonction « d'Euler » que l'on définira ultérieurement.

Dans le paragraphe I, on définit la fonction Gamma d'Euler et on en montre quelques propriétés que l'on utilisera dans le paragraphe II pour définir la fonction $\psi$ d'Euler et démontrer la formule ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe III, on étudie plus en détail la fonction Gamma, dans le but de la représenter graphiquement.

**Les paragraphes II et III sont indépendants mais utilisent des résultats du paragraphe I.**

1. **Questions préliminaires**

   **a.** Soit $\alpha \in ]0,1[$, justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$.

   **b.** Pour quelle(s) valeur(s) de $\beta$ l'intégrale $\int_0^1 t^\beta \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

**I. La fonction Gamma d'Euler**

2. Soit $x$ un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel $A$ strictement positif, tel que pour tout réel $t$ strictement supérieur à $A$, on ait $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On peut donc définir sur $]0,+\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée $\Gamma$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée $(\mathcal{F})$ :
   $\forall x \in ]0,+\infty[,\ \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (\mathcal{F})$.
   En déduire $\Gamma(2)$. Soit $n$ un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. *Dérivabilité de la fonction Gamma*
   Soient $a$ et $b$ des réels tels que $0 < a < b$.

   **a.** Pour tout réel $t$ strictement positif, on définit sur $]0,+\infty[$, la fonction $h_t$ par $h_t(x) = t^{x-1}$.
   Déterminer les variations de $h_t$. On pourra discuter selon la valeur de $t$.
   En déduire que $\forall x \in [a,b], \forall t \in ]0,+\infty[,\ 0 \leq t^{x-1} \leq \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right)$.

   **b.** Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant : pour tout réel $r$ strictement supérieur à $-1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^r \left|\ln t\right| \mathrm{d}t$ est convergente.

   Montrer avec soin que la fonction $\Gamma$ est dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

La fonction $\Gamma$ est donc dérivable sur $]0,+\infty[$. On montre de la même façon et **on admet** que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $p$ un entier naturel, écrire **sans justifier** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée $p$-ième de $\Gamma$).

**II. La fonction $\psi$ d'Euler**

On montre sans difficulté, que pour tout réel $x$ strictement positif, $\Gamma(x) > 0$. On peut donc définir sur $]0,+\infty[$, la fonction $\psi$ d'Euler par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Soit $\alpha \in ]0,1[$.

**6.** Relation entre $\psi$ et des sommes.

**a.** Quelle relation différentielle relie $\psi$ et $\ln\Gamma$ ? En déduire que

$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad \psi(x+1)-\psi(x)=\dfrac{1}{x}$ (on pourra utiliser $(\mathcal{F})$).

**b.** Soit $n$ un entier naturel non nul, déterminer en fonction de $n$ et de $\alpha$, quatre réels $u_1, v_1, u_2, v_2$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-\alpha}=\psi(u_1)-\psi(v_1) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\alpha}=\psi(u_2)-\psi(v_2).$$

**7.** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(X)=\dfrac{1}{X^2-\alpha^2}$ puis en déduire que l'on a, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\big(\psi(1+\alpha)-\psi(1-\alpha)\big)+\frac{1}{2\alpha}\big(\psi(n+1-\alpha)-\psi(n+1+\alpha)\big).$$

**8.** Enoncer avec soin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f,g)\mapsto\int_0^{+\infty}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, puis l'utiliser pour montrer que $(\Gamma')^2\le\Gamma''\times\Gamma$ où $\Gamma''$ désigne la dérivée seconde de $\Gamma$. En déduire que la fonction $\psi$ est croissante.

**9.** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a

$0\le\psi(n+1+\alpha)-\psi(n+1-\alpha)\le\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}$ (penser que $\alpha\in]0,1[$).

Conclure que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{\psi(1+\alpha)-\psi(1-\alpha)}{2\alpha}$.

**III. Etude de la fonction Gamma**

**10.** Utiliser $(\mathcal{F})$ pour déterminer un équivalent de $\Gamma$ au voisinage de $0_+$. En déduire la limite de $\Gamma$ en 0.

**11.**

**a.** Justifier que $\Gamma'$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**b.** Justifier l'existence d'un réel $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$. En déduire le signe de $\Gamma'$ et enfin, les variations de $\Gamma$.

**12.**

**a.** Déterminer la limite de $\Gamma$ en $+\infty$. On pourra utiliser des résultats précédents.

**b.** Dessiner l'allure du graphe de $\Gamma$. On représentera, s'il y a lieu, les asymptotes et les tangentes horizontales.

## Problème II : Extrait e3a 2011, MP

On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

① Pour tout $x \in ]0, 2\pi[$, on note $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$.

① Montrer que l'application $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

② Montrer que l'application $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$, définie sur $]0, 1]$, est prolongeable est prolongeable par continuité en 0.

③ En déduire que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

④ Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{(2(1-\cos x))^{\frac{1}{4}}}$.
En déduire un équivalent de $I(x)$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs positives.

② Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.$$

③ Pour tout entier $N$ supérieur ou égal à 1 et pour tout réel $x$, on note $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

① Calculer, pour tous réels $x$ et $t$, la somme $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-nt}\sin(nx)$. On pourra remarquer que $\mathrm{e}^{-nt}\sin(nx)$ est la partie imaginaire du nombre complexe $\mathrm{e}^{(-t+ix)n}$.

② En utilisant l'égalité $S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-nt}\sin(nx)}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$, montrer que la suite $(S_N(x))$ est convergente pour tout $x$ réel élément de $]0, 2\pi[$ et que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall x \in ]0, 2\pi[, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x}.$$

④ En déduire un équivalent de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs positives.