

Devoir Libre 14 (2009-2010)
Intégrales à un paramètre

RABAT LE 18 FÉVRIER 2010

Blague du jour :

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion. L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion est une pensée et foie en vous.
Et le lion répondit : Dieu, bénissez ce repas.



Mathématicien du jour

Leonhard Paul Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse. Il introduisit la terminologie de fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique, en calcul infinitésimal, en théorie des graphes, en analyse mathématique et en astronomie. Il était un fervent chrétien et s'opposa avec force aux athées éminents de son temps.

Euler

Source : Concours CCP, niveau DEUG, 2006.

Autour des fonctions Γ et ψ d'Euler

Si l'on rentre sur un logiciel de calcul formel l'instruction : $\text{sum}(1/(n^2-\alpha^2), n=1..infinity)$;

on obtient le résultat suivant : $-\frac{1}{2} \frac{\psi(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\psi(1+\alpha)}{\alpha}$.

Un des objectifs du problème qui comporte trois paragraphes est de démontrer la formule correspondante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}$$

où $\alpha \in]0, 1[$ et ψ est une fonction « d'Euler » que l'on définira ultérieurement.

Dans le paragraphe I, on définit la fonction Gamma d'Euler et on en montre quelques propriétés que l'on utilisera dans le paragraphe II pour définir la fonction ψ d'Euler et démontrer la formule ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe III, on étudie plus en détail la fonction Gamma, dans le but de la représenter graphiquement.

Les paragraphes II et III sont indépendants mais utilisent des résultats du paragraphe I.

1. Questions préliminaires

a. Soit $\alpha \in]0, 1[$, justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$.

b. Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^\beta dt$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

I. La fonction Gamma d'Euler

2. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A , on ait $e^{-t} t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ est convergente.}$$

On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée (\mathcal{F}) :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\mathcal{F}).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. Dérivabilité de la fonction Gamma

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

- a. Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$.

Déterminer les variations de h_t . On pourra discuter selon la valeur de t .

En déduire que $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq t^{x-1} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})$.

- b. Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant : pour tout réel r

strictement supérieur à -1 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^r |\ln t| dt$ est convergente.

Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a, b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

La fonction Γ est donc dérivable sur $]0, +\infty[$. On montre de la même façon et **on admet** que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

5. Soit p un entier naturel, écrire **sans justifier** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p -ième de Γ).

II. La fonction ψ d'Euler

On montre sans difficulté, que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x) > 0$. On peut donc définir

sur $]0, +\infty[$, la fonction ψ d'Euler par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

6. Relation entre ψ et des sommes.

- a. Quelle relation différentielle relie ψ et $\ln \Gamma$? En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} \text{ (on pourra utiliser } (\mathcal{F}) \text{)}.$$

- b. Soit n un entier naturel non nul, déterminer en fonction de n et de α , quatre réels

$$u_1, v_1, u_2, v_2 \text{ tels que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\alpha} = \psi(u_1) - \psi(v_1) \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+\alpha} = \psi(u_2) - \psi(v_2).$$

7. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^2 - \alpha^2}$ puis en déduire que

l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+1-\alpha) - \psi(n+1+\alpha)).$$

8. Énoncer avec soin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire

$(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$, puis l'utiliser pour montrer que $(\Gamma')^2 \leq \Gamma'' \times \Gamma$ où Γ'' désigne la dérivée seconde de Γ . En déduire que la fonction ψ est croissante.

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

(penser que $\alpha \in]0, 1[$). Conclure que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}$.

III. Etude de la fonction Gamma

10. Utiliser (\mathcal{F}) pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0_+ . En déduire la limite de Γ en 0 .

11. a. Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- b. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et enfin, les variations de Γ .

12. a. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$. On pourra utiliser des résultats précédents.

- b. Dessiner l'allure du graphe de Γ . On représentera, s'il y a lieu, les asymptotes et les tangentes horizontales.

