CNM 2012

Filière MP

Corrigé de l'épreuve: Mathématiques I

Pr. Boujaida, CPGE Rabat

I. Une fonction définie par une intégrale

Soit λ un réel vérifiant $2\lambda > -1$

1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. la fonction $\varphi_x : \theta \longmapsto e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $]0,\pi[$.

Si $\lambda \geqslant 0$ alors φ_x se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$. Elle est donc intégrable sur $]0,\pi[$

Si $\lambda < 0$ et comme pour tout $\theta \in]0,\pi/2[$, $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ alors

$$\forall \theta \in]0,\pi[,\ |e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta| = |\sin^{2\lambda}\theta| \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda}\frac{1}{\theta^{-2\lambda}} \quad \text{avec } -2\lambda < 1$$

Noter que

en fait au voisinage de 0^+ et quelque soit le signe de λ, $\sin^{2\lambda}\theta = O(\theta^{2\lambda})$ car on peut écrire $|\sin^{2\lambda}\theta| \leqslant M|\theta|^{2\lambda}$ avec $M = 1$ si $\lambda \geqslant 0$ et $M = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda}$ si $\lambda < 0$.

Donc φ_x est intégrable sur $]0,\pi/2]$. Elle est aussi intégrable pour les mêmes raisons sur $[\pi/2,\pi[$ car pour tout $\theta \in [\pi/2,\pi[$,

$$\varphi(\theta) = e^{-ix\cos(\theta)}\sin^{2\lambda}(\pi-\theta) = O_\pi\left(\frac{1}{(\pi-\theta)^{-2\lambda}}\right)$$

Ainsi

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $\varphi_x : \theta \longmapsto e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur $]0,\pi[$.

On pose dans la suite

$$f_\lambda(x) = \int_0^\pi e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,d\theta$$

1.2. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $\theta\mapsto\pi-\theta$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[\pi/2,\pi[$ sur $]0,\pi/2]$, on peut donc l'utiliser comme changement de variable:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,\mathrm{d}\theta=-\int_{\pi/2}^{0} e^{-i\cos(\pi-\theta)}\sin^{2\lambda}(\pi-\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2} e^{ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta$$

Par suite

$$\begin{aligned}f_\lambda(x)&=\int_0^{\pi/2} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\pi/2} e^{-ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi/2} e^{ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_\lambda(x)=2\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta\qquad(1)$$

1.3. On considère la fonction $g:(x,\theta)\longmapsto\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta$, $(x,\theta)\in\mathrm{D}=\mathbb{R}\times]0,\pi[$. g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D et pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $(x,\theta)\in\mathrm{D}$

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,\theta)=\cos^k\theta\cos\left(x\cos\theta+k\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2\lambda}\theta$$

et donc pour tout (x,θ)

$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,\theta)\right|\leqslant(\sin\theta)^{2\lambda}$$

D'après le développement de la question précédente, la fonction $\theta\longmapsto\sin^{2\lambda}\theta$ est intégrable sur $]0,\pi[$. Alors d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la fonction f_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et selon la formule de Leibniz

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_\lambda^{(k)}(x)=2\int_0^{\pi/2}\cos^k\theta\cos\left(x\cos\theta+k\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta$$

f_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_\lambda^{(k)}(x)=2\int_0^{\pi/2}\cos^k\theta\cos\left(x\cos\theta+k\frac{\pi}{2}\right)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta\qquad(2)$$

1.4. Une équation différentielle

Théorème du cours

de changement de variables pour les intégrales sur intervalle quelconque:
Soit $\varphi:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et $f:\mathrm{J}\to\mathrm{R}$ une fonction continue. Alors $\int_\mathrm{J} f$ est convergente ssi $\int_\mathrm{I}|\varphi'|f\circ\varphi$ est convergente et dans ce cas

$$\int_\mathrm{J} f=\int_\mathrm{I}|\varphi'|f\circ\varphi$$

Sous une forme plus pratique, dans le cas où par exemple $\mathrm{J}=]\alpha,\beta[$:
Si $\varphi:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que φ' ne s'annule pas su J, alors $\int_{\lim_\alpha\varphi}^{\lim_\beta\varphi} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente ssi $\int_\alpha^\beta\varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t$ est convergente et dans ce cas

$$\int_{\lim_\alpha\varphi}^{\lim_\beta\varphi} f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t$$

Théorème du cours

Formule de Leibniz pour dérivation à tout ordre sous le signe intégrale:
K et I étant des intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f:\mathrm{K}\times\mathrm{I}\to\mathbb{K}$ une fonction telle que

- f est continue sur $\mathrm{K}\times\mathrm{I}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ existe et elle est continue sur $\mathrm{I}\times\mathrm{K}$;
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe une fonction $\varphi_k:\mathrm{I}\to\mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur I telle que
$$\forall(x,t)\in\mathrm{K}\times\mathrm{I},\ \left|\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x,t)\right|\leqslant\varphi_k(t)$$

Alors la fonction
$$g:x\mapsto\int_\mathrm{I} f(x,t)\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur K et
$\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in\mathrm{K},$
$$g^{(k)}(x)=\int_\mathrm{I}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x,t)\mathrm{d}t$$

1.4.1 D'après la relation (2 - p. à gauche), pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_\lambda''(x) = -2\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Alors, moyennant le fait que les deux fonctions $\theta \longmapsto \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta$ et $\theta \longmapsto \sin^2(\theta)\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta$ sont intégrables sur $[0,\pi/2[$,

$$\begin{aligned} f_\lambda''(x) &= -2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= -2\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta + 2\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2(\lambda+1)}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= -f_\lambda(x) + f_{\lambda+1}(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda''(x) = f_{\lambda+1}(x) - f_\lambda(x) \qquad (3)$$

Théorème du cours

Formule d'intégration par parties pour intégrales sur intervalle quelconque: Soient $f,g:]\alpha,\beta[\to\mathbb{K}$ des fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ ($\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{R}}$, avec $\alpha<\beta$). Si l'une des conditions suivantes se réalise: (i) Les intégrales $\int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes; (ii) l'une des deux intégrales précédentes est convergente et la fonction $t\mapsto f(t)g(t)$ admet des limites finies en α et en β Alors

$$\int_\alpha^\beta f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t\to\alpha}^{t\to\beta} - \int_\alpha^\beta f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

sachant que les quantités en intervention dans la formule ont toutes un sens

1.4.2 Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après (2 - p. à gauche), $f_\lambda'(x) = -\int_0^{+\infty}\cos\theta\sin(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta$.

Ensuite parce qu'on peut écrire

$$x\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda+2}\theta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(x\cos\theta)\Big)\sin^{2\lambda+1}\theta$$

que la fonction $\theta\mapsto x\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda+2}\theta$ est intégrable sur $[0,\pi/2[$, et que la fonction $\theta\mapsto\sin(x\cos\theta)\sin^{2\lambda+1}\theta$ admet des limites finies en 0 et en $\pi/2$ (lesquelles sont nulles) ; alors la formule de l'intégration par parties s'applique. Elle permet de faire:

$$\begin{aligned} xf_{\lambda+1}(x) &= x\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda+2}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= -\Big[\sin(x\cos\theta)\sin^{2\lambda+1}\theta\Big]_{\theta\to0}^{\theta\to\pi/2} + (2\lambda+1)\int_0^{\pi/2}\sin(x\cos\theta)\cos\theta\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta \\ &= -(2\lambda+1)f_\lambda'(x) \end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (2\lambda+1)f_\lambda'(x) = -xf_{\lambda+1}(x) \qquad (4)$$

1.4.3 D'après les relations (4) et (3)

$$\forall x\in\mathbb{R}, xf_\lambda''(x) + (2\lambda+1)f_{\lambda'}(x) + xf_\lambda(x) = 0 \qquad (5)$$

ce qui signifie que f_λ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$xy'' + (2\lambda+1)y' + xy = 0 \tag{6}$$

II. Une formule d'Euler

On rappelle que la fonction Gamma d'Euler est définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

2.1. Soit p un réel strictement positif.

2.1.1 Les intégrales $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ sont convergentes. Une intégration par parties donne, sachant que $\lim\limits_{t\to 0} t^p e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^p e^{-t} = 0$

$$\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \mathrm{d}t = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

soit $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

Noter que

C'est ici un résultat de cours (comme certaines des questions qui suivent) ; mais la question demande explicitement de le démontrer. Il faut donc le faire.

2.1.2 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = 1$. Un raisonnement par récurrence utilisant la relation de la question précédente démontre alors que

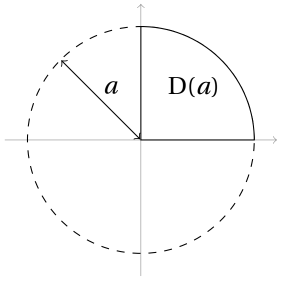
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

2.1.3 La fonction $t \longmapsto t^{p-1} e^{-t}$ est continue strictement positive sur $]0,+\infty[$, et puisqu'elle est intégrable sur $]0,+\infty[$ alors $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t > 0$. Soit $\Gamma(p) > 0$.

$$\forall p > 0,\ \Gamma(p) > 0$$

2.1.4 la fonction $s \longmapsto s^2$ induit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphsime de $]0,+\infty[$ sur lui même. Le changement de variables $t = s^2$ donne alors

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} s^{2p-1} e^{-s^2} \mathrm{d}s$$



$$\forall p > 0,\ \Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} s^{2p-1}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

2.2.

Soient p et q deux réels tels que $2p-1 \geqslant 0$ et $2q-1 \geqslant 0$. Pour tout réel $a > 0$, on pose

$$\mathrm{I}_p(a) = \int_0^a t^{2p-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \mathrm{D}(a) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \geqslant 0, y \geqslant 0 \textit{ et } x^2+y^2 \leqslant a^2\right\}$$

2.2.1 Soit $a > 0$. La fonction $h : (x,y) \longmapsto x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $[0,a]^2$ donc d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\iint_{[0,a]^2} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^a x^{2p-1}e^{-x^2}\left(\int_0^a y^{2q-1}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_0^a y^{2q-1}e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^a x^{2p-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\forall a > 0,\ \iint_{[0,a]^2} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{I}_p(a)\mathrm{I}_q(a)$$

2.2.2 On considère le changement de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, de telle sorte que

$$(x,y) \in \mathrm{D}(a) \Longleftrightarrow (r,\theta) \in [0,a]\times[0,\pi/2]$$

Sachant que le jacobien de ce changement de variable est $\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(r,\theta)} = r$, alors

$$\iint_{\mathrm{D}(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,a]\times[0,\pi/2]} r^{2p+2q-2}\cos^{2p-1}(\theta)\sin^{2q-1}(\theta)e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Et ensuite via la formule de Fubini

$$\iint_{\mathrm{D}(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^a r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}(\theta)\sin^{2q-1}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$$

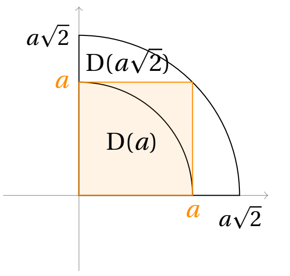
soit

$$\iint_{\mathrm{D}(a)} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{I}_{p+q}(a)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}(\theta)\sin^{2q-1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

2.2.3 Pour tout $a > 0$,

$$\mathrm{D}(a) \subset [0,a]^2 \subset \mathrm{D}(a\sqrt{2})$$

car si $(x, y) \in D(a)$ alors $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ avec $x, y \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant a$, ie $(x, y) \in [0, a]^2$. Et si $(x, y) \in [0, a]^2$ alors $x, y \geqslant 0$ et $x^2 + y^2 \leqslant 2a^2$, soit $(x, y) \in D(a\sqrt{2})$.



Maintenant la fonction $h : (x, y) \longmapsto x^{2q-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}$ est partout positive sur $[0, +\infty[^2$ donc

$$\iint_{D(a)} h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{[0,a]^2} h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D(a\sqrt{2})} h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ce qui donne

$$\mathrm{I}_{p+q}(a)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \leqslant \mathrm{I}_p(a)\mathrm{I}_q(a) \leqslant \mathrm{I}_{p+q}(a\sqrt{2})\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

Mais comme pour tout $p > 0$ et par convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2p-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, on a

$$\lim_{a\to}\mathrm{I}_p(a) = \int_0^{+\infty} t^{2p-1}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(p)$$

alors d'après le théorème d'encadement, en faisant tendre a vers $+\infty$ dans les inégalités (7) on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}(\theta)\sin^{2q-1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\forall (p, q) \in]0, +\infty[^2,\ \Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}(\theta)\sin^{2q-1}(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

2.3. D'après la formule d'EULER (8), avec $p = q = 1/2$ on a $\Gamma(1/2)^2 = 2\Gamma(1)\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \pi$. et comme Γ est partout strictement positive alors $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Ensuite un raisonnement par récurrence utilisant la relation $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ valable pour tout $p > 0$ démontre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$$

III. Fonctions de BESSEL

Pour tout $\lambda > -1/2$, on note J_λ, la fonction de BESSEL d'ordre λ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0,\ \mathrm{J}_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x)$$

J_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite on suppose que $\lambda > -\frac{1}{2}$

3.1. Pour tout $x > 0$, d'après l'expression de f_λ donnée dans (1 - p.36)

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = 2\int_0^{\pi/2} \cos\left(x\cos\theta\right)\sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{\sin\left(x\cos\theta\right)}{-x}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\frac{\sin x}{x}$$

Ensuite,

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} f_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\forall x > 0,\ \mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

et de ce fait

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \qquad (9)$$

3.2. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_\lambda'(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1} f_\lambda(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} f_\lambda'(x)\right) \\
&= \frac{\lambda}{x}\mathrm{J}_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\cdot\frac{x}{2\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) && (10) \\
&= \frac{\lambda}{x}\mathrm{J}_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) \\
&= \frac{\lambda}{x}\mathrm{J}_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+1+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) && (11) \\
&= \frac{\lambda}{x}\mathrm{J}_\lambda(x) - \mathrm{J}_{\lambda+1}(x)
\end{aligned}$$

à l'étape (10) on a utilisé la relation $(2\lambda+1)f_\lambda'(x) = -x f_{\lambda+1}(x)$ démontrée précédemment, et à l'étape (11) on a remplacé $\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{2})$ par $\Gamma(\lambda+1+\frac{1}{2})$. On a ainsi

$$\forall x > 0,\ \mathrm{J}_{\lambda+1}(x) = \frac{\lambda}{x}\mathrm{J}_\lambda(x) - \mathrm{J}_\lambda'(x) \qquad (12)$$

On pose

$$\mathrm{H} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Les fonctions en jeu ici sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut donc considérer que H est l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ qui à une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ associe la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$\mathrm{H}(f) : x \longmapsto \frac{1}{x} f'(x)$$

Notons D l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ qui à tout $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ associe sa fonction dérivée f' et P l'endomorphisme du même espace qui à un élément f associe la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} f(x)$. On constate dès lors que $\mathrm{H} = \mathrm{P} \circ \mathrm{D}$ et que P est un endomorphisme inversible. P^{-1} étant l'endomorphisme qui à tout $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ associe

$$\mathrm{P}^{-1}(f) : x \longmapsto x f(x)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire: $\mathrm{D} \circ \mathrm{H}^{n-1} = \mathrm{P}^{-1} \circ (\mathrm{P} \circ \mathrm{D}) \circ \mathrm{H}^{n-1} = \mathrm{P}^{-1} \circ \mathrm{H}^n$. ce qui signifie que pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$\left[\mathrm{H}^{n-1}(f)\right]'(x) = x\mathrm{H}^n(f)(x) \tag{13}$$

Considérons maintenant la fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ définie par

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{H}^n(f)(x)$$

Pour $n = 0$ on a bien d'après (9 - p. précédente) $\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) = (-1)^0 x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{H}^0(f)(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la formule soit vraie à l'ordre n. Soit $x > 0$. En utilsant l'hypothèse de récurrence et la relation (13) on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}'_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left((n+\frac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} \mathrm{H}^n(f)(x) + x^{n+\frac{1}{2}} \left(\mathrm{H}^n(f)\right)'(x) \right) \\
&= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left((n+\frac{1}{2}) \frac{1}{x}\, \mathrm{H}^n(f)(x) + x\mathrm{H}^{n+1}(f)(x) \right) \\
&= \frac{n+\frac{1}{2}}{x} \mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x) + (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1+\frac{1}{2}} \mathrm{H}^{n+1}(f)(x)
\end{aligned}$$

Or d'après la relation (12 - p.41) (qu'on applique à $\lambda = n+\frac{1}{2}$)

$$\mathrm{J}_{n+1+\frac{1}{2}}(x) = \frac{n+\frac{1}{2}}{x}\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}} - \mathrm{J}'_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Par suite, $\mathrm{J}_{n+1+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1+\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{n+1}(f)(x)$.

Ce qui achève la démonstration. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{14}$$

3.4. On pose $\gamma(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})2^\lambda}$. En reprenant la définition de J_λ et en la dérivant deux fois

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_\lambda(x) &= \gamma(\lambda)x^\lambda f_\lambda(x)\\
\mathrm{J}'_\lambda(x) &= \gamma(\lambda)\left(\lambda x^{\lambda-1}f_\lambda(x) + x^\lambda f'_\lambda(x)\right)\\
\mathrm{J}''_\lambda(x) &= \gamma(\lambda)\left(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}f_\lambda(x) + 2\lambda x^{\lambda-1}f'_\lambda(x) + x^\lambda f''_\lambda(x)\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
x^2\mathrm{J}''_\lambda(x) + x\mathrm{J}'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)\mathrm{J}_\lambda(x) &= \gamma(\lambda)\Big[\left((x^2-\lambda^2)x^\lambda + \lambda x^\lambda + \lambda(\lambda-1)x^\lambda\right)f_\lambda(x) +\\
&\qquad \left(x^{\lambda+1} + 2\lambda x^{\lambda+1}\right)f'_\lambda(x) + x^{\lambda+2}f''_\lambda(x)\Big]\\
&= \gamma(\lambda)x^{\lambda+1}\left[xf_\lambda(x) + (2\lambda+1)f'_\lambda(x) + xf''_\lambda(x)\right]
\end{aligned}$$

Mais selon (5 - p.37), $xf''_\lambda(x) + (2\lambda+1)f_{\lambda'}(x) + xf_\lambda(x) = 0$. Donc

$$x^2\mathrm{J}''_\lambda(x) + x\mathrm{J}'_\lambda(x) + (x^2-\lambda^2)\mathrm{J}_\lambda(x) = 0$$

J_λ est une solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\lambda^2)y = 0 \tag{15}$$

3.5. La fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$$

Donc avec $t = x\cos\theta$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0, \pi/2]$

$$\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\cos^{2n}\theta\sin^{2\lambda}\theta$$

Fixons $x > 0$ et considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$u_n : \theta \longmapsto \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\cos^{2n}\theta\sin^{2\lambda}\theta,\ \theta \in]0, \pi/2]$$

On a alors :

- Les fonctions u_n sont continues sur $]0, \pi/2]$, chacune est intégrable sur $]0, \pi/2]$ car au voisinage de 0 et quelque soit le signe de λ

$$u_n(\theta) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\theta^{-2\lambda}}\right) \quad \text{avec } -2\lambda < 1$$

- la série de fonctions $\sum u_n$ **CVS** sur $]0, \pi/2]$ et sa somme, la fonction $\mathrm{U} : \theta \longmapsto \cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta$ est continue sur $]0, \pi/2]$;
- et finalement

$$\int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \mathrm{M}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{-2\lambda}} \leqslant \mathrm{K}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{16}$$

$$\text{où } \mathrm{M} = 1 \text{ si } \lambda \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{M} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda} \text{ sinon et } \mathrm{K} = \mathrm{M}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{-2\lambda}}$$

Comme la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (DSE de la fonction cosh) alors la série $\sum \int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)|\mathrm{d}\theta$ converge.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur intervalle quelconque d'une série de fonctions sont vérifiées, ce qui permet d'affirmer que

$$f_\lambda(x) = 2\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta$$

Or d'après la Formule d'EULER (8 - p.40) appliquée à $p = n + \frac{1}{2}$ et $q = \lambda + \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\lambda+n+1)}$$

et vu l'expression de $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ on a donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\sin^{2\lambda}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\lambda+n+1)}\cdot\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

Ainsi

$$f_\lambda(x) = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(\lambda+n+1)}x^{2n} \tag{17}$$

Cas particulier

Si $\lambda \geqslant 0$ alors les fonctions u_n sont prolongeables par continuité sur le segment $[0,\pi/2]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ **CVN** sur $[0,\pi/2]$. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment d'une série de fonctions est donc applicable dans ce cas.

Théorème du cours

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions *continues* sur un segment J, qui **CVU** sur J ; alors la série $\sum \int_J f_n$ est convergente et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_J f_n = \int_J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)$$

Alors

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!\Gamma(\lambda+n+1)} x^{2n}$$

$$\forall x>0,\ J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \qquad (18)$$

3.6. f_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en 0 et donc

$$\lim_{x\to 0} f_\lambda(x) = f_\lambda(0) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2\lambda}\theta \mathrm{d}\theta$$

ou d'une autre manière, en utilisant le développement (17 - p. à gauche) de f_λ,

$$f_\lambda(0) = \sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Les deux expressions de $f_\lambda(0)$ se rejoignent en utilisant la formule d'EULER.

Ensuite, sachant que pour tout $x>0$, $J_\lambda(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x)$. Alors

$$J_\lambda(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{(x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

3.7. Une autre expression intégrale de J_n, $n\in\mathbb{N}$

3.7.1 Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Sachant que pour tout $p\in\mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ip\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p\neq 0 \\ 1 & \text{si } p=0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^{n+2m} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n+2m}(-1)^k\binom{n+2m}{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+2m-k)\theta}e^{-ik\theta}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n+2m}(-1)^k\binom{n+2m}{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2i(m-k)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= (-1)^m\binom{n+2m}{m}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^{n+2m}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta=(-1)^m\binom{n+2m}{m}\qquad(19)$$

Par définition

$$\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

3.7.2 Soit $x>0$. En utilisant la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

$$e^{ix\sin\alpha}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(ix\sin\alpha)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}\right)^k$$

soit

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ e^{ix\sin\alpha}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)^k$$

Ensuite, selon ce résultat, pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$e^{ix\sin\theta-in\theta}=e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}v_k(\theta)$$

avec $v_k(\theta)=\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k e^{-in\theta}$. Les fonctions v_k sont continues sur le segment $[-\pi,\pi]$ et pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$|v_k(\theta)|\leqslant\frac{x^k}{k!}$$

donc la série de fonctions $\sum v_k$ **CVN** sur $[-\pi,\pi]$. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment permet alors de faire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta-in\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\qquad(20)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta&=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-p)\theta}e^{-ip\theta}e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-2p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

de quoi on déduit que

- s'il existe $p \in [\![0, k]\!]$ tel que $k = n + 2p$ alors selon (19 - p. à gauche)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta = (-1)^p \binom{n+2p}{p} \cdot 2\pi$$

- si aucun $p \in [\![0, k]\!]$ ne vérifie $k = n + 2p$ alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta = 0$$

Le développement (20 - p. à gauche) devient alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^{n+2p} e^{-in\theta} d\theta \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(n+2p)!} \binom{n+2p}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}
\end{aligned}$$

ce dernier terme est exactement le développement de $J_n(x)$ vu dans (18 - p.45).

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta \qquad (21)$$

3.7.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta) d\theta \right)$$

mais comme la fonction $\theta \longmapsto \sin(x\sin\theta - n\theta)$ est impaire alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x\sin\theta - n\theta) d\theta = 0$$

et grâce à la parité de la fonction $\theta \longmapsto \cos(x\sin\theta - n\theta)$ on a finalement

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta \qquad (22)$$

IV. Application à l'étude de l'équation de Kepler

4.1.

Pour tout $\varepsilon \in]-1,1[$ on note φ_ε la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_\varepsilon(x) = x - \varepsilon \sin x$$

4.1.1 Soit $\varepsilon \in]-1,1[$. La fonction φ_ε est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\varepsilon'(x) = 1 - \varepsilon\cos x$$

comme $-1 < \varepsilon < 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_\varepsilon'(x) > 0$. φ_ε est donc strictement croissante. D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\varphi_\varepsilon(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. C'est ici plus précisément $]\lim_{-\infty}\varphi_\varepsilon, \lim_{+\infty}\varphi_\varepsilon[=]-\infty,\infty[$.

Alors

φ_ε est une $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème du cours

Une fonction $f : I \longrightarrow J$, où I et J sont des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, est un $\mathscr{C}^p$-difféomorphisme $(p \in \mathbb{N}^*)$ si et seulement si

$$\begin{cases} f(I) = J \\ f \text{ est de classe } \mathscr{C}^p \text{ sur } I \\ \forall t \in I,\ f'(t) \neq 0 \end{cases}$$

Noter que: l'injectivité de f est une conséquence du fait que sa dérivée ne s'annule pas sur I et de ce fait, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, garde un signe constant sur I (f est donc strictement monotone sur I).

4.1.2 Tout élément t de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent par la bijection φ_ε dans $\mathbb{R}$ qu'on va noter $x_{t,\varepsilon}$ (vu qu'il dépend de t et de ε). $x_{t,\varepsilon}$ est l'unique élément de $\mathbb{R}$ tel que

$$\varphi_\varepsilon(x_{t,\varepsilon}) = x_{t,\varepsilon} - \varepsilon\sin(x_{t,\varepsilon}) = t$$

Ce qui permet de définir l'application $v : (t,\varepsilon) \longmapsto x_{t,\varepsilon}$. Ainsi

v est l'unique application de $\mathbb{R}\times]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times]-1,1[,\ v(t,\varepsilon) = t + \varepsilon\sin\big(v(t,\varepsilon)\big)$$

Précision

On a pour tout $(t,x,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2\times]-1,1[$

$$x = t + \varepsilon\sin x \Longleftrightarrow x = v(t,\varepsilon) \qquad (23)$$

Précision

Si on fixe $\varepsilon \in]-1,1[$ alors $\psi_\varepsilon : t \longmapsto v(t,\varepsilon)$ est la bijection réciproque de φ_ε $(\varphi_\varepsilon^{-1} = \psi_\varepsilon)$

4.2. **Premières propriétés de la fonction v:** Soit $\varepsilon \in]-1,1[$.

4.2.1 On a $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ et $\varphi_\varepsilon(\pi) = \pi$ ce qui signifie par définition de v que

$$v(0,\varepsilon) = 0 \text{ et } v(\pi,\varepsilon) = \pi \qquad (24)$$

4.2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $v(-t,\varepsilon) = -t + \varepsilon \sin\big(v(-t,\varepsilon)\big)$ qu'on peut réécrire sous la forme: $-v(-t,\varepsilon) = t + \varepsilon \sin\big(-v(-t,\varepsilon)\big)$. Ce qui implique, par unicité de $v(t,\varepsilon)$, que $v(t,\varepsilon) = -v(-t,\varepsilon)$.

La fonction $(t \longmapsto v(t,\varepsilon),\ t \in \mathbb{R})$ est impaire

4.2.3 Soit $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $v(t+2\pi,\varepsilon) = t + 2\pi + \varepsilon \sin\big(v(t+2\pi,\varepsilon)\big)$ qu'on peut écrire sous la forme: $v(t+2\pi,\varepsilon) - 2\pi = t + \varepsilon \sin\big(v(t+2\pi,\varepsilon) - 2\pi\big)$, implique que $v(t,\varepsilon) = v(t+2\pi,\varepsilon) - 2\pi$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ v(t+2\pi,\varepsilon) = v(t,\varepsilon) + 2\pi$$

Ensuite, l'égalité précédente implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t+2\pi,\varepsilon) - (t+2\pi) = v(t,\varepsilon) - t$ et cela signifie que

La fonction $(t \longmapsto v(t,\varepsilon) - t,\ t \in \mathbb{R})$ est 2π-périodique

4.3. Régularité de la fonction v

On note $\mathscr{U} = \mathbb{R}\times]-1,1[\times\mathbb{R}$, et on désigne par g la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par

$$\forall (t,\varepsilon,x) \in \mathscr{U},\ g(t,\varepsilon,x) = x - \varepsilon \sin x - t$$

4.3.1 g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{U}$ comme somme de produits de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $(t,\varepsilon,x) \in \mathscr{U}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,\varepsilon,x) = 1 - \varepsilon \cos(x)$$

et là on constate que pour tout $(t,\varepsilon,x) \in \mathscr{U}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,\varepsilon,x) > 0$.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{U}$ et

$$\forall (t,\varepsilon,x),\ \frac{\partial g}{\partial x}(t,\varepsilon,x) > 0$$

4.3.2 Soit $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$. Posons $x = v(t,\varepsilon)$ de telle sorte que $g(t,\varepsilon,x) = 0$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(t,\varepsilon,x) \neq 0$ donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts V de $\mathbb{R}\times]-1,1[$ et I de $\mathbb{R}$, voisinages respectifs de (t,ε) et de x et une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $w : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{I}$ tels que

$$\forall (s,\delta,y) \in \mathrm{V}\times\mathrm{I},\ g(s,\delta,y) = 0 \Longleftrightarrow y = w(s,\delta)$$

Mais puisque

$$g(s,\delta,y) = 0 \Longleftrightarrow y = s + \delta \sin y \Longleftrightarrow y = v(s,\delta)$$

alors v coïncide avec w sur l'ouvert V. La restriction de v à V est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi pour tout $(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$, il existe un voisinage V de (t,ε) sur lequel v est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors

$$v \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\times]-1,1[.$$

Précision

L'existence de v a été démontré de manière globale sur son domaine de définition $\mathbb{R}\times]-1,1[$. Le fait qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ est justifié de manière locale grâce au *théorème des fonctions implicites*. C'est l'une des utilisations courante de ce dernier théorème.

4.4. Expression de v à l'aide d'une série entière de la variable ε

4.4.1 Pour tout $(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times]-1,1[$ $v(t,\varepsilon)=t+\varepsilon\sin\big(v(t,\varepsilon)\big)$. ce qui donne en dérivant partiellement par rapport à t et à ε

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon)=1+\varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon)\cos\big(v(t,\varepsilon)\big)\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)=\sin\big(v(t,\varepsilon)\big)+\varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)\cos\big(v(t,\varepsilon)\big)\end{cases}$$

v est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc ces dérivées partielles existent.

En multipliant la première équation par $\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}(t,\varepsilon)$, la deuxième par $\frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon)$ et en faisant la différence des deux équations ainsi obtenues, on déduit que

$$0=\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t,\varepsilon)-\sin\big(v(t,\varepsilon)\big)\frac{\partial v}{\partial t}(t,\varepsilon)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial v}{\partial t}\sin v$$

4.4.2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $\sin^n v$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial\varepsilon\partial t}\sin^n v+n\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\cos v\sin^{n-1}v$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\cdot\sin^n v\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial \varepsilon}\sin^n v+n\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\frac{\partial v}{\partial t}\cos v\sin^{n-1}v$$

Mais, v étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, le théorème de Schwarz donne $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial\varepsilon}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varepsilon\partial t}$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}\cdot\sin^n v\right)\tag{25}$$

4.4.3 Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $n=1$ on a bien $\dfrac{\partial v}{\partial\varepsilon}=\dfrac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin v$.

Attention ! à la formulation erronée d'un raisonnement par récurrence qui consiste à dire *supposons que* $\forall n\in\mathbb{N}, \cdots\mathscr{P}(n)\cdots$ dans ce cas il n'y a plus rien à démontrer.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons que $\dfrac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n}=\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)$. Alors

$$\frac{\partial^{n+1}v}{\partial\varepsilon^{n+1}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial^n v}{\partial^n\varepsilon}\right)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)\right)$$

Mais justement d'après le théorème de Schwarz généralisé, lorsqu'on applique les dérivées partielles suivantes à des fonctions de classes $\mathscr{C}^n$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}v}{\partial\varepsilon^{n+1}}&=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)\right)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}\cdot\sin^n v\right)\right)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\sin v\cdot\sin^n v\right)\\&=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^{n+1}v\right)\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. Ainsi

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\partial^n v}{\partial\varepsilon^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\sin^n v\right)}$$

4.4.4 Soit $n\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\sin^{n+1}(t)=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(e^{it}-e^{-it}\right)^{n+1}=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}e^{i(n+1-2k)t}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\sin^{n+1}t)=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\big(i(n+1-2k)\big)^n e^{i(n+1-2k)}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\sin^{n+1}t)\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}|n+1-2k|^n$$

Mais comme $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=2^{n+1}$ et pour tout $k\in[\![0,n+1]\!]$, $|n+1-2k|\leqslant n+1$ alors

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\sin^{n+1}t)\right|\leqslant(n+1)^n$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\sin^{n+1}t)\right|\leqslant(n+1)^n}$$

Ensuite ; soit $z \in \mathbb{C}$; alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\cdot\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{n^{n-1}}{n!}|z|^n$$

le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\frac{z^n}{n!}$ est donc supérieur ou égal à celui de $\sum \frac{n^{n-1}}{n!}z^n$ qu'on va noter R_1. En utilisant la formule de Stirling, si $z \neq 0$ alors:

$$\frac{n^{n-1}}{n!}z^n \sim n^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n z^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(ze)^n}{n^{3/2}}$$

la suite $\left(\frac{n^{n-1}}{n!}z^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée si et seulement si la suite $\left((ze)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui est équivalent à $|z| \leqslant \frac{1}{e}$. On en déduit que $R_1 = \frac{1}{e}$.

Résultat de cours

La formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Attention

Lorsqu'on écrit une formule d'équivalence, toujours vérifier si elle ne se ramène pas à l'équivalence d'une expression donnée avec 0.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\frac{z^n}{n!}$ est $\geqslant \frac{1}{e}$.

On peut démontrer que

$$\forall (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[,\ v(t,\varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\sin^n t)\frac{\varepsilon^n}{n!}$$

4.5. Expression de v faisant intervenir une série de Fourier de la variable t

Soit $\varepsilon \in]-1,1[$. On rappelle que la fonction $v_\varepsilon : t \longmapsto v(t,\varepsilon) - t$, définie sur $\mathbb{R}$ est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ et impaire. On notera $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites des coefficients de Fourier trigonométriques de v_ε.

4.5.1 Puisque v_ε est impaire alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, encore par imparité de v_ε,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_\varepsilon(t)\sin(nt)dt$$

$\psi_\varepsilon = v_\varepsilon + \mathbf{id}_\mathbb{R}$ est la bijection réciproque du $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme φ_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $t = \varphi_\varepsilon(u)$. Ce qui revient à poser $u = \psi_\varepsilon(t) = t + v_\varepsilon(t)$. Sachant que $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ et $\varphi_\varepsilon(\pi) = \pi$ alors

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(u - \varphi_\varepsilon(u)\right)\sin\left(n\varphi_\varepsilon(u)\right)\varphi'_\varepsilon(u)du$$

Précision

On intègre ici sur un segment, on n'a pas donc vraiment besoin que le changement de variable soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. On le signale ici juste par commodité de calcul.

Le calcul suivant démarre avec une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-(u-\varphi_\varepsilon(u))\frac{\cos(n\varphi_\varepsilon(u))}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi (1-\varphi_\varepsilon'(u))\cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u\right)\\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (1-\varphi_\varepsilon'(u))\cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u\\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u - \int_0^\pi \varphi_\varepsilon'(u)\cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u\right)\\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(n\varphi_\varepsilon(u))}{n}\right]_0^\pi\\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u))\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

et comme $\varphi_\varepsilon(u) = u - \varepsilon\sin u$ alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nu - n\varepsilon\sin u)\mathrm{d}u$$

Théorème du cours

Théorème de Dirichlet de la CVN: Soit une fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$, *continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux*, alors sa série de Fourier **CVN** sur $\mathbb{R}$ et la somme de cette dernière est g.

4.6. D'après l'expression (22 - p.48) de la fonction J_n on a $b_n = \frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)$.

Maintenant, puisque la fonction v_ε est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors d'après le théorème de la convergence normale d'une série de Fourier,

$$\forall t\in\mathbb{R},\ v_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt)$$

Ce qui donne

$$\forall t\in\mathbb{R},\ v(t,\varepsilon) = t + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_n(n\varepsilon)}{n}\sin(nt)$$

4.7. La fonction v_ε est continue donc d'après le théorème de Parseval la série $\sum b_n^2$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_\varepsilon(t)^2\mathrm{d}t$$

En posant comme dans la question précédente $t=\varphi_\varepsilon(u)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi v_\varepsilon(t)^2\mathrm{d}t &= \int_0^\pi (u-\varphi_\varepsilon(u))^2\varphi_\varepsilon'(u)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^\pi \varepsilon^2\sin^2 u\,(1-\varepsilon\cos u)\mathrm{d}u\\
&= \varepsilon^2\int_0^\pi \sin^2 u\mathrm{d}u - \varepsilon^3\int_0^\pi \cos u\sin^2 u\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^{\pi}\big(1-\cos(2u)\big)\mathrm{d}u - \frac{\varepsilon^3}{3}\Big[\sin^3(u)\Big]_0^{\pi}$$
$$= \frac{\pi\varepsilon^2}{2}$$

de quoi on déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(\mathrm{J}_n(n\varepsilon)\big)^2}{n^2} = \frac{\varepsilon^2}{4}}$$