Mamouni My Ismail

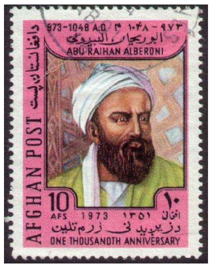
Devoir Libre n°27 (e3a 2005, MP)

Intégrales à paramètre
Exemple de calcul d'intégrale

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion. L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion soit croyant et ait une pensée et foie en vous.
Et le lion répondis : oh mon Dieu merci, que ce repas soit béni.



Abu Raihan Al-Biruni (973-1048 AD)

Mathématicien du jour

was a versatile scholar and scientist of the 11th century, who had equal facility in physics, metaphysics, mathematics, geography and history. Born in the town of Khewa near Khawarizm (present-day Uzbekistan) in 973 AD, he was a contemporary of the well-known physician Ibn Sina. He accurately determined the densities of 18 different stones. One of his famous books, Kitab-Al-Jawahir, deals with the properties of various precious stones. He also developed a method for trisection of angle and other problems that cannot be solved with a ruler and a compass alone. He also discussed, centuries before the rest of the world, the question whether the earth rotates around its axis or not. He also ascertained that the speed of light, as compared to the speed of sound, was immense. He has been considered to be the greatest of all times.

1 Partie I

Soit $\mathbf{I}$ un intervalle [1] de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbf{I}$:

$$y'' + y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbf{I}$ est $\left\{x \to \mathbf{A}\cos x + \mathbf{B}\sin x \mid (\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

2. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur l'intervalle [2] $\mathbf{I}$. Que peut-on dire des suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\dfrac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

1. Note UPS : non réduit à un point
2. Note UPS : pour cette question et la suivante, $\mathbf{I}$ voisinage de $+\infty$

2 Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le espace vectoriel des fonctions [3] de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1,0,0,0),\ \ e_2 = (0,1,0,0),\ \ e_3 = (0,0,1,0),\ \ e_4 = (0,0,0,1).$$

Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x.$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur l'application h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.

3. Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.
   - i. Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.
   - ii. Déterminer le noyau de ψ. Quel est le rang de ψ ?
   - iii. Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.

4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'' + y = \cos x \quad (\mathcal{E}_1)$ Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $y'' + y = \dfrac{1}{x} \quad (\mathcal{E})$

3 Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

1. Soit x un réel positif.
   - a. Démontrer l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.
   - b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\, dt$ est convergente.

   On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)\, dt.$$

2. En utilisant l'inégalité démontrée en 1a, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3. On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit ϵ un réel strictement positif.
   - a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

3. Note UPS : à valeurs réelles

b En utilisant l'inégalité

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$$

que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

i Pour $x \geq \epsilon$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\, dt$ est convergente.

ii La fonction G est dérivable sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

c Conclure.

4 En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

5 Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6 a Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

4 Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a f est positive ;

b f est décroissante ;

c $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$;

d l'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1 Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2 Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire que la fonction $|\sin(t)|\, f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, x]$, pour tout $x > 0$.

3 Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, f(t)\, dt.$$

a Justifier l'encadrement : $2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq 2f(n\pi)$.

b En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

c Montrer que :

$$w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt.$$

4 On considère les deux suites $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

a Montrer que la suite $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b Montrer que la suite $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite l commune.

Pour tous réels positifs x et y tels que $x \leq y$, on pose $I_f(x,y) = \int_x^y \sin(t)f(t)\,dt$.

5 Déduire de 4. que l'application $I_f(x,y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\int_x^{+\infty} \sin(t)f(t)\,dt$ cette limite.

6 Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Partie V

1 Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_x(t) = \frac{1}{x+t}$, vérifie les hypothèses de la partie IV.

On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt.$$

2 En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt.$$

3 En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

4 Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

5 En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = G(x),$$

la fonction G étant définie dans la partie III.

À la prochaine