Mamouni My Ismail

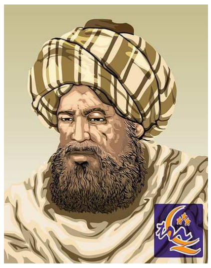
Corrigés Devoir Libre n°27 (Pr. Patte)

Intégrales à paramètre
Exemple de calcul d'intégrale

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est un type qui se promène dans la rue, et accroché sur la porte d'une entrée d'un jardin, il voit : ATTENTION PERROQUET MÉCHANT ! Et un peux plus loin dans le jardin, il aperçoit notre bête, attachée sur un perchoir. Notre, un hardi gaillard se marre en voyant la bestiole attachée sur son perchoir. Décidant de tenter le diable, il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet : "REX, ATTAQUE !!!!"



Mathématicien du jour

Al-Battani (env. 855-923)

Astronome et mathématicien musulman, d'origine turque. On le désigne parfois comme le « Ptolémée des Arabes ». Il a découvert le mouvement de l'apogée du Soleil, calculé l'inclinaison de l'axe terrestre (23° 35'). Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

1 Partie I

1. On suppose I non réduit à un singleton. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, résolue en y'', homogène, à coefficients continus sur l'intervalle I. L'ensemble des solutions sur I est un espace vectoriel de dimension deux. Les fonctions sin et cos sont deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$, indépendantes (de wronskien constant non nul). Elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions sur I.

2. On suppose que I est un voisinage de $+\infty$. On écrit g comme combinaison linéaire de sin et cos : $g = A.\cos + B.\sin$. Alors les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement $((-1)^n.A)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n.B)_{n\in\mathbb{N}}$. Elles ne peuvent converger que si $A = B = 0$.

3. On suppose encore que I est un voisinage de $+\infty$ et on reprend les notations de la question précédente. On note l la limite de g en $+\infty$. Comme les suites $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l. D'après la question précédente, $A = B = 0$. Donc g est la fonction nulle.

2 Partie II

Il faut préciser que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

1 L'application $\mathcal{H}$ qui envoie v sur h_v est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et V en est l'image. Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2 Il reste à justifier que $\mathcal{H}$ est injective. Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $h_v = 0$.
Alors $h_v(x) = 0$ et $h_v'(x) = (a + d + cx)\cos x + (c - b - ax)\sin x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc le système $\left\{\begin{array}{rcccl} h_v(0) & = & b & = & 0 \\ h_v(\pi/2) & = & d + c.\pi/2 & = & 0 \\ h_v'(0) & = & a + d & = & 0 \\ h_v'(\pi/2) & = & c - a.\pi/2 & = & 0 \end{array}\right.$.

On calcule a et c en fonction de d dans les équations 2 et 3 : $a = -d$; $c = -2d/\pi$; et en reportant dans la dernière équation : $d(-2/\pi - \pi/2) = 0$. D'où $d = 0$, puis $a = c = 0$. Donc $v = 0$.

Donc $\mathcal{H}$ est injective : c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur V. Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, son image $\mathcal{B}$ est une base de V.

3 Avec les notations précédentes, $h_v = a.h_{e_1} + b.h_{e_2} + c.h_{e_3} + d.h_{e4}$ et, après deux lignes de calcul,

$$\psi(h_v) = c\cos - a\sin = c.h_{e_2} - a.h_{e_4}$$

i ψ est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans V.

ii $\psi(h_v) = 0 \Leftrightarrow c = a = 0 \Leftrightarrow h_v \in \operatorname{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. Donc $\ker(\psi) = \operatorname{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. On en déduit que (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\ker(\psi)$, donc $\dim(\ker(\psi)) = 2$. Le théorème du rang donne alors $\operatorname{rg}(\psi) = \dim V - \dim\ker(\psi) = 2$.
Le calcul de $\psi(h_v)$ donne aussi $\operatorname{Im}(\psi) = \operatorname{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$ et (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\operatorname{Im}(\psi)$.

iii Comme $\psi(h_{e_2}) = \psi(h_{e_4}) = 0$, que $\psi(h_{e_1}) = -h_{e_2}$ et $\psi(h_{e_2}) = h_{e_4}$, la matrice de ψ dans V vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2, donc $\dim(\operatorname{Im}(\psi)) = \operatorname{rg}(\psi) = 2$. L'image de ψ contient les éléments indépendants h_{e_2} et h_{e_4} : donc (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base ψ.

4 $\cos = h_{e_2} = -\psi(h_{e_1})$. Donc $-h_{e_1} : x \mapsto -x\cos x$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$: somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$, soit $x \mapsto -x\cos x + A\cos x + B\sin x$ avec A et B constantes réelles.

3 Partie III

1 Soit x un réel positif.

a $\forall t \in \mathbb{R}_+, e^{-tx} \leq 1$ et $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, donc $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

b La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, elle est positive. D'après 1b, elle est dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\, dt$ est convergente.

2 On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
* Domination : $\forall x, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (id 1b).

Le théorème affirme alors la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

a Les fonctions polynômes $(x,t) \mapsto -xt$ et $(x,t) \mapsto 1+t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la seconde ne s'annule pas. Par composition avec la fonction exponentielle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis quotient, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$.

b Pour $t \geq 0$, ou bien $t \leq 1 \leq 1+t^2$, ou bien $t \leq t^2 \leq 1+t^2$; donc $\dfrac{t}{1+t^2} \leq 1$. Donc $\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$. Si $x \geq \epsilon$, alors $\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$.

i Même raisonnement qu'au 1b en remarquant que $e^{-\epsilon t}$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $\dfrac{1}{t^2}$.

ii On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous une intégrale.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(x,.) : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ existe sur $]\epsilon, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.) : t \mapsto -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(.,t) : x \mapsto -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\epsilon, +\infty[$.
* Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\epsilon t}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

c Comme tout $x > 0$ admet un voisinage du type $]\epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$ et que la dérivabilité est une notion locale, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

3 On note $\phi(x,t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ de sorte que $\forall x \in]0, +\infty[, G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(x,t)\, dt$.

Soit $\epsilon > 0$.

* Pour tout $x > \epsilon$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
* $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ existe sur $]\epsilon, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(.,t) : x \mapsto \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\epsilon, +\infty[$.
* Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\epsilon t}$ est indépendante de x, continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G' est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon,+\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon,+\infty[, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

On termine comme au 3c : la fonction G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même de classe $\mathcal{C}^2$) et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

4 $G(x)+G''(x)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

Donc G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

5 a Pour tout $x > 0$, $G'(x) \leq 0$ et G est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc G est une application décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

b Comme G est décroissante et minorée par 0 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $G(x)$ admet une limite finie positive lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour $x > 0$: comme $\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$, on a $0 \leq G(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$. Donc $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4 Partie IV

1 La suite (u_n) est croissante et f décroissante. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle est de limite nulle, la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (critère des séries alternées).

2 Au voisinage de 0, $\sin(t)f(t) \sim tf(t)$, donc $\sin(t)f(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que la fonction $|\sin(t)|\,f(t)$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur l'intervalle $[0,x]$ pour tout $x > 0$ et, plus généralement, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

3 a Sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$, par décroissance de f et positivité de $|\sin(t)|$, on a l'encadrement

$$|\sin(t)|\,f((n+1)\pi) \leq |\sin(t)|\,f(t) \leq |\sin(t)|\,f(n\pi).$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt \leq w_n \leq f(n\pi)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt.$$

Comme sin est de signe constant sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ (celui de $(-1)^n$),

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)\,dt\right| = \cdots = 2.$$

D'où l'encadrement demandé.

b Comme $2f$ est une fonction continue sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, il existe $u_n \in [n\pi,(n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$.

c Sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, $\sin(t) = \sin(t-n\pi+n\pi) = (-1)^n \underbrace{\sin(t-n\pi)}_{\geq 0} = (-1)^n\,|\sin(t)|$.

D'où l'égalité $w_n = (-1)^n \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt$.

4 On note $p_n = \int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt$ et $q_n = \int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt$.

a $p_{n+1} - p_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt + \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt$
$= (-1)^{2n}w_{2n} + (-1)^{2n+1}w_{2n+1} = w_{2n} - w_{2n+1}$.
Comme au 1, $(f(u_n))$ est décroissante. Donc (w_n) est décroissante et $p_{n+1} - p_n \geq 0$ pour tout n.
Concluion : (p_n) est croissante.

b De même, $q_{n+1} - q_n = -w_{2n+1} + w_{2n+2} \leq 0$. Donc (q_n) est décroissante.

c $q_n - p_n = (-1)^n w_n = 2(-1)^n f(u_n)$. Comme f a une limite nulle en $+\infty$ et que (u_n) tend vers $+\infty$, $(q_n - p_n)$ tend vers 0. Les deux suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune.

5 On déduit de la question 4 que la suite $\left\{\int_0^{n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain$l$.
Soit maintenant $y \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leq y < (n+1)y$: n est la partie entière de y/π.
Alors $I_f(0,y) = \int_0^{n\pi} \sin(t)f(t)\,dt + \int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt$.
Dans cette somme, comme n tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers l quand y tend vers $+\infty$.
De plus $\left|\int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt\right| \leq \int_{n\pi}^{y} |\sin(t)|\,f(t)\,dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t|)f(t)\,dt = w_n$. Comme w_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.
Finalement, $I_f(0,y)$ tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

Pour terminer, $I_f(x,y) = I_f(0,y) - I_f(0,x)$ tend vers $l - I_f(0,x)$ quand y tend vers $+\infty$.

6 Il suffit de vérifier que $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ satisfait les hypothèses de la partie IV, ce qui est immédiat.

5 Partie V

1 Immédiat !!!

2 Le changement de variables $(u = t + x)$ est immédiat à repérer, mais aucun théorème du cours ne l'autorise car la fonction sous l'intégrale n'est pas intégrable. On le fait en revenant à la définition.
$\int_0^y \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt = \int_x^{x+y} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du$. Puis on fait tendre y vers $+\infty$ et on obtient l'égalité annoncée dans l'énoncé.

3 En écrivant $\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)$ et en posant dans l'une des intégrales $u = t - \pi/2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt &= \cos(x)\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^y \frac{\cos(t)}{t}\,dt \\
&= \cos(x)\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_{\pi/2}^y \frac{\cos(t)}{t}\,dt \\
&= \cos(x)\int_0^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_0^{y-\pi/2} \frac{\sin(u)}{u+\pi/2}
\end{aligned}$$

On fait tendre y vers $+\infty$:

$$H(x) = \cos(x)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du.$$

Comme $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathbb{R}_+$) de dérivée $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. De même, $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Par produit et combinaison linéaire, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}H'(x) = &-\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x).\frac{\sin(x)}{x}\\ &+\cos(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt + \sin(x).\frac{\cos(x)}{x} - \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\end{aligned}$$

D'où

$$H'(x) = -\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \cos(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du.$$

De même, H' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}H''(x) = &-\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x).\frac{\sin(x)}{x}\\ &-\sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt + \cos(x).\frac{\cos(x)}{x} + \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}H''(x) &= -\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \frac{1}{x} + \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\\ &= -H(x) + \frac{1}{x}\end{aligned}$$

4 On reprend l'expression de la question 3 :

$$\begin{aligned}H(x) &= \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\\ &= \cos(x)\underbrace{\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \sin(x)\underbrace{\left\{\int_0^{x-\pi/2}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\end{aligned}$$

Comme sin et cos sont bornées, $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5 La fonction $H - G$ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et a une limite finie 0 en $+\infty$. D'après la première partie, c'est donc la fonction nulle. Donc $G = H$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

À la prochaine