XM6-CPGE MY YOUSSEF

Devoir Libre 14 Bis (2009-2010)

Intégrales à un paramètre

RABAT LE 18 FÉVRIER 2010

Blague du jour :
C'est un type qui se promène dans la rue, et accroché sur la porte d'une entrée d'un jardin, il voit : ATTENTION PERROQUET MÉCHANT ! Et un peux plus loin dans le jardin, il aperçoit notre bête, attachée sur un perchoir. Notre, un hardi gaillard se marre en voyant la bestiole attachée sur son perchoir. Décidant de tenter le diable, il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet : "REX, ATTAQUE ! ! ! !"

Mathématicien du jour **Al-Battani**
Al-Battani (env. 855-923) était un astronome et mathématicien musulman, d'origine turque. On le désigne parfois comme le « Ptolémée des Arabes ». Il a découvert le mouvement de l'apogée du Soleil, calculé l'inclinaison de l'axe terrestre (23° 35′). Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

Source : Concours E3A, MP, 2005.

Soit I un intervalle [1] de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur I :

$$y'' + y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

1) Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est $\left\{x \to A\cos x + B\sin x \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
2) Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur l'intervalle [2] I. Que peut-on dire des suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
3) Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions [3] de de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1).$$

Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x.$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2) Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur l'application h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.
3) Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.
   (i) Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.
   (ii) Déterminer le noyau de ψ. Quel est le rang de ψ ?
   (iii) Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.
4) On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y = \cos x \qquad (\mathcal{E}_1)$$

Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

[1] Note UPS : non réduit à un point
[2] Note UPS : pour cette question et la suivante, I voisinage de $+\infty$
[3] Note UPS : à valeurs réelles

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' + y = \frac{1}{x} \qquad (\mathcal{E})$$

Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

1) Soit x un réel positif.

1a. Démontrer l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

1b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x,t)\, dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)\, dt.$$

2) En utilisant l'inégalité démontrée en 1a, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3) On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit ϵ un réel strictement positif.

3a. Justifier que F est de de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

3b. En utilisant l'inégalité

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$$

que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

(i) Pour $x \geq \epsilon$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\, dt$ est convergente.

(ii) La fonction G est dérivable sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

3c. Conclure.

4) En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

5) Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6a. Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

6b. En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a. f est positive ;

b. f est décroissante ;

c. $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$;

d. l'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2) Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire que la fonction $|\sin(t)|\, f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,x]$, pour tout $x > 0$.

3) Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, f(t)\, dt.$$

3a. Justifier l'encadrement : $2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq 2f(n\pi)$.

3b. En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3c. Montrer que :

$$w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt.$$

4) On considère les deux suites $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4a. Montrer que la suite $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4b. Montrer que la suite $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4c. En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite l commune.

Pour tous réels positifs x et y tels que $x \leq y$, on pose $I_f(x,y) = \int_x^y \sin(t)f(t)\,dt$.

5) Déduire de 4. que l'application $I_f(x,y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\int_x^{+\infty} \sin(t)f(t)\,dt$ cette limite.

6) Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Partie V

1) Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_x(t) = \frac{1}{x+t}$, vérifie les hypothèses de la partie IV.

On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt.$$

2) En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt.$$

3) En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

4) Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

5) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = G(x),$$

la fonction G étant définie dans la partie III.

Fin

À la prochaine