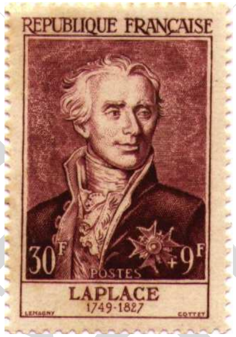
Devoir Surveillé

5 Transformée de Laplace

Blague du jour

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion.
L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion est une pensée et foie en vous.
Et le lion répondis : Dieu, bénissez ce repas.



Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) — Mathématicien du jour

Mathématicien, astronome et physicien français.Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique et de théorie des probabilités. il était nommé ministre de l'Intérieur, puis comte de l'Empire, en enfin marquis.

Énoncé : CCP 2011, MP

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{2x^n}{n^2-1}$.

① Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

② On note S la fonction somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R,R[$.

③ Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieurs et déterminer cette limite.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E); $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

① Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.

② Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

PROBLÈME : AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :
-$\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;

-F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout f dans E, on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$$

① **Questions préliminaire**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On considère les propositions suivantes :
(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
(ii) G admet une limite finie en $+\infty$.
Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :
(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

② ① Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

② Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

③ Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+_*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

③ ① On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

② Soit $\lambda \geq 0$ réel. on considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ par : $h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

④ Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \longmapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

⑤ **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

⑥ Régularité d'une transformée de Laplace

① Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.

② Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques

Dans toute cette partie, f est un élément de E

⑦ On suppose dans cette question que f est dans F.

① Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

② *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sue $\mathbb{R}^+$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

⑧ *Théorème de la valeur finale*

On suppose dans cette question que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

① Démontrer que f appartient à F.

② Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\mathrm{d}t[x]$ où h_n est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

③ En déduire à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

④ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

⑨ Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout x dans $[0,+\infty[$.

① Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et déterminer R'.

En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

② On fixe $\varepsilon > 0$.

Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x\displaystyle\int_0^A |R(t)|\mathrm{d}t + \varepsilon$

③ Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

⑩ **Calcul de l'intégrale de Direchlet**

Ici f la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

① Démontrer que la fonction $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

② En considérant la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

③ Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin X + \cos X) - 1).$$

Démontrer que la fonction $t \longmapsto (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

④ Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant(La démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9)) :
Lorsque f dans E vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 0}\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
On notera que, par rapport à la question 9), on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com