Corrigé rédigé par Philippe PATTE
philippe.patte@prepas.org

Partie I

1. On suppose I non réduit à un singleton. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, résolue en y'', homogène, à coefficients continus sur l'intervalle I. L'ensemble des solutions sur I est un espace vectoriel de dimension deux. Les fonctions sin et cos sont deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$, indépendantes (de wronskien constant non nul). Elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions sur I.
2. On suppose que I est un voisinage de $+\infty$. On écrit g comme combinaison linéaire de sin et cos : $g = A.\cos + B.\sin$. Alors les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\dfrac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement $((-1)^n.A)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n.B)_{n\in\mathbb{N}}$. Elles ne peuvent converger que si $A = B = 0$.
3. On suppose encore que I est un voisinage de $+\infty$ et on reprend les notations de la question précédente. On note l la limite de g en $+\infty$. Comme les suites $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\dfrac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l. D'après la question précédente, $A = B = 0$. Donc g est la fonction nulle.

Partie II

Il faut préciser que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

1. L'application $\mathcal{H}$ qui envoie v sur h_v est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et V en est l'image. Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Il reste à justifier que $\mathcal{H}$ est injective. Soit $v = (a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $h_v = 0$.
Alors $h_v(x) = 0$ et $h'_v(x) = (a + d + cx)\cos x + (c - b - ax)\sin x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a donc le système $\left\{\begin{array}{ccccc} h_v(0) & = & b & = & 0 \\ h_v(\pi/2) & = & d + c.\pi/2 & = & 0 \\ h'_v(0) & = & a + d & = & 0 \\ h'_v(\pi/2) & = & c - a.\pi/2 & = & 0 \end{array}\right.$.
On calcule a et c en fonction de d dans les équations 2 et 3 : $a = -d$; $c = -2d/\pi$; et en reportant dans la dernière équation : $d(-2/\pi - \pi/2) = 0$. D'où $d = 0$, puis $a = c = 0$. Donc $v = 0$.

   Donc $\mathcal{H}$ est injective : c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur V. Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, son image $\mathcal{B}$ est une base de V.
3. Avec les notations précédentes, $h_v = a.h_{e_1} + b.h_{e_2} + c.h_{e_3} + d.h_{e4}$ et, après deux lignes de calcul,
$$\psi(h_v) = c\cos - a\sin = c.h_{e_2} - a.h_{e_4}$$
   (i) ψ est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans V.
   (ii) $\psi(h_v) = 0 \Leftrightarrow c = a = 0 \Leftrightarrow h_v \in \mathrm{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. Donc $\ker(\psi) = \mathrm{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$. On en déduit que (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\ker(\psi)$, donc $\dim(\ker(\psi) = 2$. Le théorème du rang donne alors $\mathrm{rg}(\psi) = \dim V - \dim\ker(\psi) = 2$. Le calcul de $\psi(h_v)$ donne aussi $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(h_{e_2}, h_{e_4})$ et (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.
   (iii) Comme $\psi(h_{e_2}) = \psi(h_{e_4}) = 0$, que $\psi(h_{e_1}) = -h_{e_2}$ et $\psi(h_{e_2}) = h_{e_4}$, la matrice de ψ dans V vaut
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Cette matrice est de rang 2, donc $\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{rg}(\psi) = 2$. L'image de ψ contient les éléments indépendants h_{e_2} et h_{e_4} : donc (h_{e_2}, h_{e_4}) est une base ψ.

4. $\cos = h_{e_2} = -\psi(h_{e_1})$. Donc $-h_{e_1} : x \mapsto -x\cos x$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$: somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$, soit $x \mapsto -x\cos x + A\cos x + B\sin x$ avec A et B constantes réelles.

Partie III

1. Soit x un réel positif.

   1a. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathrm{e}^{-tx} \leq 1$ et $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

   1b. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, elle est positive. D'après 1b, elle est dominée au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
   * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   * Domination : $\forall x, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (id 1b).

   Le théorème affirme alors la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

3a. Les fonctions polynômes $(x,t) \mapsto -xt$ et $(x,t) \mapsto 1+t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la seconde ne s'annule pas. Par composition avec la fonction exponentielle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis quotient, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

   On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$.

3b. Pour $t \geq 0$, ou bien $t \leq 1 \leq 1+t^2$, ou bien $t \leq t^2 \leq 1+t^2$; donc $\dfrac{t}{1+t^2} \leq 1$. Donc $\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-xt}$. Si $x \geq \epsilon$, alors $\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-\epsilon t}$.

   (i) Même raisonnement qu'au 1b en remarquant que $\mathrm{e}^{-\epsilon t}$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $\dfrac{1}{t^2}$.

   (ii) On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous une intégrale.
   * Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(x,.) : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   * $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ existe sur $]\epsilon, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.) : t \mapsto -\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
   * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(.,t) : x \mapsto -\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\epsilon, +\infty[$.
   * Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \mathrm{e}^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\epsilon t}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3c. Comme tout $x > 0$ admet un voisinage du type $]\epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$ et que la dérivabilité est une notion locale, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

4. On note $\phi(x,t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ de sorte que $\forall x \in]0,+\infty[, G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(x,t)\ \mathrm{d}t$.

   Soit $\epsilon > 0$.
   * Pour tout $x > \epsilon$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   * $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ existe sur $]\epsilon,+\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \epsilon$, la fonction $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
   * Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(.,t) : x \mapsto \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\epsilon,+\infty[$.
   * Domination : $\forall x > \epsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \mathrm{e}^{-\epsilon t}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\epsilon t}$ est indépendante de x, continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G' est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon,+\infty[$ et on a

   $$\forall x \in]\epsilon,+\infty[, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t.$$

   On termine comme au 3c : la fonction G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même de classe $\mathcal{C}^2$) et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

5. $G(x) + G''(x)$
   $$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-x}\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$
   Donc G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6a. Pour tout $x > 0$, $G'(x) \leq 0$ et G est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc G est une application décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

6b. Comme G est décroissante et minorée par 0 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $G(x)$ admet une limite finie positive lorsque x tend vers $+\infty$.

   Pour $x > 0$: comme $\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$, on a $0 \leq G(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$. Donc $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Partie IV

1. La suite (u_n) est croissante et f décroissante. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle est de limite nulle, la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (critère des séries alternées).

2. Au voisinage de 0, $\sin(t)f(t) \sim tf(t)$, donc $\sin(t)f(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que la fonction $|\sin(t)|\, f(t)$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur l'intervalle $[0,x]$ pour tout $x > 0$ et, plus généralement, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

3a. Sur le segment $[n\pi,(n+1)\pi]$, par décroissance de f et positivité de $|\sin(t)|$, on a l'encadrement

   $$|\sin(t)|\, f((n+1)\pi) \leq |\sin(t)|\, f(t) \leq |\sin(t)|\, f(n\pi).$$

   En intégrant, on obtient

   $$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\ \mathrm{d}t \leq w_n \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\ \mathrm{d}t.$$

   Comme sin est de signe constant sur $[n\pi,(n+1)\pi]$ (celui de $(-1)^n$),

   $$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\ \mathrm{d}t = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)\ \mathrm{d}t\right| = \cdots = 2.$$

   D'où l'encadrement demandé.

3b. Comme $2f$ est une fonction continue sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, il existe $u_n \in [n\pi,(n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$.

3c. Sur $[n\pi,(n+1)\pi]$, $\sin(t)=\sin(t-n\pi+n\pi)=(-1)^n\underbrace{\sin(t-n\pi)}_{\geq 0}=(-1)^n\,|\sin(t)|$.

D'où l'égalité $w_n=(-1)^n\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$.

4. On note $p_n=\displaystyle\int_0^{2n\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ et $q_n=\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$.

   4a. $p_{n+1}-p_n=\displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t+\int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$
   $=(-1)^{2n}w_{2n}+(-1)^{2n+1}w_{2n+1}=w_{2n}-w_{2n+1}$.
   Comme au 1, $(f(u_n))$ est décroissante. Donc (w_n) est décroissante et $p_{n+1}-p_n\geq 0$ pour tout n. Concluion : (p_n) est croissante.

   4b. De même, $q_{n+1}-q_n=-w_{2n+1}+w_{2n+2}\leq 0$. Donc (q_n) est décroissante.

   4c. $q_n-p_n=(-1)^n w_n=2(-1)^n f(u_n)$. Comme f a une limite nulle en $+\infty$ et que (u_n) tend vers $+\infty$, (q_n-p_n) tend vers 0. Les deux suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune.

5. On déduit de la question 4 que la suite $\left\{\displaystyle\int_0^{n\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain$l$.
Soit maintenant $y\geq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\pi\leq y<(n+1)y$: n est la partie entière de y/π.
Alors $I_f(0,y)=\displaystyle\int_0^{n\pi}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t+\int_{n\pi}^{y}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$.
Dans cette somme, comme n tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers l quand y tend vers $+\infty$.
De plus $\left|\int_{n\pi}^{y}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t\right|\leq\int_{n\pi}^{y}|\sin(t)|\,f(t)\ \mathrm{d}t\leq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(t|)f(t)\ \mathrm{d}t=w_n$. Comme w_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_{n\pi}^{y}\sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.
Finalement, $I_f(0,y)$ tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

   Pour terminer, $I_f(x,y)=I_f(0,y)-I_f(0,x)$ tend vers $l-I_f(0,x)$ quand y tend vers $+\infty$.

6 Il suffit de vérifier que $f:t\mapsto\dfrac{1}{t}$ satisfait les hypothèses de la partie IV, ce qui est immédiat.

Partie V

1. Immédiat !!!
2. Le changement de variables $(u=t+x)$ est immédiat à repérer, mais aucun théorème du cours ne l'autorise car la fonction sous l'intégrale n'est pas intégrable. On le fait en revenant à la définition.
$\displaystyle\int_0^y\frac{\sin(t)}{t+x}\ \mathrm{d}t=\int_x^{x+y}\frac{\sin(u-x)}{u}\ \mathrm{d}u$. Puis on fait tendre y vers $+\infty$ et on obtient l'égalité annoncée dans l'énoncé.
3. En écrivant $\sin(t-x)=\sin(t)\cos(x)-\sin(x)\cos(t)$ et en posant dans l'une des intégrales $u=t-\pi/2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_x^y\frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t &= \cos(x)\int_x^y\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\sin(x)\int_x^y\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t\\ &= \cos(x)\int_x^y\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t+\sin(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\sin(x)\int_{\pi/2}^y\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t\\ &= \cos(x)\int_0^y\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\cos(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t+\sin(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\sin(x)\int_0^{y-\pi/2}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

On fait tendre y vers $+\infty$:

$$H(x)=\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\cos(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t+\sin(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t-\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\ \mathrm{d}u.$$

Comme $t\mapsto\dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathbb{R}_+$) de dérivée $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{x}$. De même, $t\mapsto\dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto\displaystyle\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x\mapsto\dfrac{\cos(x)}{x}$.

Par produit et combinaison linéaire, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$H'(x) = -\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \cos(x).\frac{\sin(x)}{x}$$
$$+\cos(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sin(x).\frac{\cos(x)}{x} - \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u$$

D'où

$$H'(x) = -\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \cos(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u.$$

De même, H' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$H''(x) = -\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sin(x).\frac{\sin(x)}{x}$$
$$-\sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \cos(x).\frac{\cos(x)}{x} + \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u$$

D'où

$$\begin{aligned} H''(x) &= -\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x} + \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u \\ &= -H(x) + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. On reprend l'expression de la question 3 :

$$\begin{aligned} H(x) &= \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \cos(x)\underbrace{\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \sin(x)\underbrace{\left\{\int_0^{x-\pi/2}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,\mathrm{d}u\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \end{aligned}$$

Comme sin et cos sont bornées, $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5. La fonction $H - G$ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et a une limite finie 0 en $+\infty$. D'après la première partie, c'est donc la fonction nulle. Donc $G = H$ sur $\mathbb{R}_+^*$.