Corrigé : Pr. Patte, CPGE France

Partie I

① Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'+cy=f \\ y(0)=0 \end{cases}$, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y', à coefficients continus sur I, admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.

On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x).\mathrm{e}^{cx}$ est dérivable sur I et que
$\forall x \in I,\ g'(x) = \mathrm{e}^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x) = \mathrm{e}^{cx} f(x)$.

Comme $g(0) = 0$: $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{ct} f(t)\ \mathrm{d}t$; ce qui montre la formule annoncée.

② $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.

Partie II

① Vu en cours : $\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$.

② Soit $x \in I$.
$|\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^{-cx} \displaystyle\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-cx} \left|\int_0^x \mathrm{e}^{ct}\ \mathrm{d}t\right| \|f\|_\infty = \dfrac{1}{c}\left|1-\mathrm{e}^{-cx}\right| \|f\|_\infty \leq \dfrac{\max(|1-\mathrm{e}^{-ca}|, |1-\mathrm{e}^{-cb}|}{c} \|f\|_\infty$.

Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \dfrac{\max(|1-\mathrm{e}^{-ca}|, |1-\mathrm{e}^{-cb}|}{c} \|f\|_\infty$.

③ $|\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^{-cx} \displaystyle\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-ca} \int_{[0,x]} \mathrm{e}^{cb}\,|f(t)|\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{c(b-a)} \int_{[a,b]} |f(t)|\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_1$.

Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a).\mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_1$.

④ En combinant les questions II 1 et 4, on obtient $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a}\,\mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_2$.
On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a}.\sqrt{b-a}\,\mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_2$.

⑤ Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $\mathcal{C}^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$, de la norme $\|.\|_1$ ou de la norme $\|.\|_2$.

Partie III

① On utilise la formule du I 1. Si $\lambda \neq c$, $\varphi(f_\lambda)(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-cx}}{c-\lambda}$; sinon, $\varphi(f_\lambda)(x) = x\,\mathrm{e}^{-cx}$.

② Dans tous les cas, les fonctions f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont positives, continues sur $I = [0, +\infty[$ et négligeables au voisinage de $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$, donc intégrables sur I.

On obtient facilement $\|f_\lambda\|_1 = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \dfrac{1}{c\lambda}$.

③ Le même raisonnement donne $\|f_\lambda\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda+c)}}$.

④ La restriction de φ à $L^1(I)$, encore notée φ, est linéaire.
Soit $f \in L^1(I)$. On montre que $\varphi(f)$ (qui est continue) est intégrable en montrant que $\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathrm{d}x$ est majorée quand X décrit I.
Le théorème de Fubini sur un domaine triangulaire (donc élémentaire) assure que
$\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_0^X \mathrm{e}^{-cx}\int_0^x \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}x = \int_0^X \left(\int_0^x \mathrm{e}^{c(t-x)}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^X\left(\int_t^X \mathrm{e}^{c(t-x)}\,|f(t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$

Donc $\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_0^X \dfrac{1-\mathrm{e}^{c(t-X)}}{c}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^X \dfrac{1}{c}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{c}\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$.
On en déduit que $\varphi(f)$ est intégrable sur I et que $\|\varphi(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$.
Autrement dit, $\varphi(f)$ est dans $L^1(I)$ et φ est un endomorphisme de $L^1(I)$.

L'inégalité $\|\varphi(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$, valable pour tout $f \in L^1(I)$, assure la continuité de l'endomorphisme φ sur $L^1(I)$. De plus, $|||\varphi|||_1 \leq \dfrac{1}{c}$.

Comme $\dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \dfrac{1}{c}$, $|||\varphi|||_1 = \dfrac{1}{c}$.

⑤ En multipliant l'égalité $f = g' + cg$ par g et en intégrant entre 0 et X, on obtient

$$\forall X>0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit que : $c\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^X g(t)^2\ \mathrm{d}t}$.

Donc $c\sqrt{\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2\ \mathrm{d}t}$, que $\sqrt{\int_0^X g(t)^2\ \mathrm{d}t}$ soit nul ou non.

Finalement, si f est dans $L^2(I)$, on a $\forall X>0, \sqrt{\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t} \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_2$. Comme g^2 est continue et positive, cette majoration assure l'intégrabilité de g^2, donc l'appartenance de g à $L^2(I)$: φ est un endomorphisme de $L^2(I)$.

On obtient de plus la majoration $\|g\|_2 = \|\varphi(f)\|_2 \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_2$, qui traduit la continuité de φ sur $L^2(I)$. On a également $|||\varphi|||_2 \leq \dfrac{1}{c}$.

Comme $\dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \dfrac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}} \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} \dfrac{1}{c}$, on a finalement

$|||\varphi|||_2 = \dfrac{1}{c}$.

Partie IV

① Soit f dans G.
On doit montrer que $g = \varphi(f)$ est dans G.
Sur $]-R, R[$, f est somme d'une série entière de rayon de convergence ρ au moins égal à R. Il en est de même de la fonction $t \mapsto e^{ct}$ (qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$). Donc, sur $]-R, R[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{ct}$ est somme de la série entière produit, dont le rayon de convergence ρ' est au moins égal à $\min(\rho, +\infty) = \rho$.

Par primitivation, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{ct}\,dt$ est développable en série entière sur $]-R, R[$, la série entière ayant pour rayon de convergence ρ'.
Enfin, par produit avec la fonction $x \mapsto e^{-cx}$, qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, g est développable en série entière sur $]-R, R[$, la série entière ayant un rayon de convergence au moins égal à ρ'.

② $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Comme la somme d'une série entière est dérivable terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence :

$\forall x \in]-R, R[,\ \varphi(f)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n$; donc $\forall x \in]-R, R[,\ \varphi(f)'(x) + c\varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)b_{n+1} + cb_n] x^n$.

Par unicité du développement en série entière, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (n+1)b_{n+1} + cb_n$.

En notant $u_n = (-1)^n \dfrac{n! b_n}{c^n}$, la relation précédente s'écrit $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n! a_n}{c^{n+1}}$.
Comme $b_0 = \varphi(f)(0) = 0$, $u_0 = 0$.

Donc $u_N = \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n+1} \dfrac{n! a_n}{c^{n+1}}$. Finalement, $b_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-c)^{N-n-1} \dfrac{n!}{N!} a_n$.

Partie V

① ① Vu en cours : le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

② Vérification élémentaire.

③ C'est la norme associée au produit scalaire ϕ.

② Comme φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$, on peut trouver β dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq \beta \|f\|_2 .$$

① Soit f dans $L^2(I)$. Par hypothèse, $\varphi(f)$ est dans $L^2(I)$, qui est un espace vectoriel, donc $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est dans $L^2(I)$. Donc $\varphi(f)$ est dans $H(I)$, et vaut 0 en 0, donc est dans K.
De plus, $\|\varphi(f)'\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\beta\|f\|_2 = (1 + c\beta)\|f\|_2$;

donc $\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2 \leq \beta^2 \|f\|_2^2 + (1+c\beta)^2 \|f\|_2^2$.

Finalement, avec $A = \sqrt{\beta^2 + (1+c\beta)^2}$, qui est indépendant de f, $\|\varphi(f)\|_H \leq A \|f\|_2$.

② Tout d'abord, φ est une application linéaire de $L^2(I)$ dans K.

Si $\varphi(f) = 0$, alors $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$. Donc φ est injectif (c'est valable sur $C^0(I)$).

Soit g dans K. On pose $f = g' + cg$. Alors f est continue et appartient à $L^2(I)$ (par combinaison linéaire d'éléments de $L^2(I)$). De plus, comme $g(0) = 0$, $g = \varphi(f)$.

Donc φ est surjective de $L^2(I)$ dans K.

Finalement, φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

③ L'inégalité de la question 2.a assure la continuité de l'application linéaire φ de $(L^2(I), \|.\|_2)$ dans $(K, \|.\|_H)$.

④ Soit g dans K. D'après la question 2.b, $\varphi^{-1}(g) = g' + cg$.

Donc $\left\|\varphi^{-1}(g)\right\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2 \leq \|g\|_H + c\|g\|_H = (1+c)\|g\|_H$.

Cette inégalité assure la continuité de l'application linéaire φ^{-1} de $(K, \|.\|_H)$ dans $(L^2(I), \|.\|_2)$.

Partie VI

① La solution générale de l'équation $y' + cy = f$ s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation $y' + cy = 0$ (soit $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-cx}$ avec k constante réelle) et d'une solution particulière de l'équation complète, par exemple $\varphi(f)$. Elle s'écrit donc

$$y : x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-cx} + \varphi(f)(x) \quad \text{avec } k \text{ constante réelle.}$$

On écrit que y est 2π-périodique si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y(x+2\pi)$. Après simplification de l'égalité, on obtient :

y est 2π-périodique si et seulement si $k = \ldots$ (une quantité indépendante de x !!!).

Mais il y a mieux. Si y est solution de l'équation différentielle, comme f est 2π-périodique, on vérifie facilement que $z : x \mapsto y(x+2\pi)$ est aussi solution.

Alors y est 2π-périodique si et seulement si $y(0) = z(0)$, soit encore $y(0) = y(2\pi)$, soit encore

$$k = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi c}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ct} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

D'où l'existence et l'unicité demandée.

Alors $\psi(f)(0) = k = \ldots$.

Tout d'abord, ψ est linéaire ; ça se voit facilement, par linéarité de l'intégrale, sur l'expression de $\psi(f)$:

$$\psi(f)(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi c}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ct} f(t)\, \mathrm{d}t.\mathrm{e}^{-cx} + \varphi(f)(x).$$

On peut aussi le prouver en invoquant le principe de superposition.

Ensuite, ψ est bien à valeurs dans F par construction.

Enfin ψ est bijective de E dans F. La preuve est identique à celle donnée à la question V 2b pour φ.

Donc ψ est un isomorphisme de E dans F.

② Comme $f = \psi(f)' + c\psi(f)$, on obtient, par linéarité de c_k : $c_k(f) = c_k(\psi(f)') + c.c_k(\psi(f)) = \mathrm{i}k.c_k(\psi(f)) + c.c_k(\psi(f)) = (c + \mathrm{i}k)d_k(f)$.

③ La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$. C'est la formule de Parseval, utilisable avec f dans E.

Pour g dans F : $\|g\|_F^2 = \|g\|_E^2 + \|g'\|_E^2$.
En appliquant à g et à g' le résultat précédent, on obtient :
$\|g\|_F^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g')|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g)|^2 + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mathrm{i}kc_k(g)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)\,|c_k(g)|^2$.

Soit f dans E.

Alors $\|\psi(f)\|_F^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)\,|d_k(f)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1+k^2}{c^2+k^2} |c_k(f)|^2$.

Or l'application $x \mapsto \dfrac{1+x}{c^2+x}$ est monotone sur $\mathbb{R}^+$ (croissante si $c \geq 1$, décroissante si $c \leq 1$). Donc pour $x \geq 0$, la quantité $\dfrac{1+x}{c^2+x}$ est comprise entre la valeur en 0 (soit $\dfrac{1}{c^2}$) et la limite en $+\infty$ (soit 1).

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1+k^2}{c^2+k^2}$ est compris entre les constantes 1 et $\dfrac{1}{c^2}$.

On en déduit que $\|\psi(f)\|_F^2$ est compris entre $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$ et $\dfrac{1}{c^2}\,\|f\|_E^2$.

Finalement, $\dfrac{\|\psi(f)\|_F}{\|f\|_E}$ est compris entre 1 et $\dfrac{1}{c}$:

$$\forall f \in E, f \neq 0, \min(1, \frac{1}{c}) \leq \frac{\|\psi(f)\|_F}{\|f\|_E} \leq \max(1, \frac{1}{c}).$$

④ L'inégalité de droite assure la continuité de l'application linéaire ψ de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$.
On peut réécrire l'inégalité de gauche :

$$\forall g \in F, g \neq 0, \frac{\|\psi^{-1}(g)\|_E}{\|g\|_F} \leq \max(1, c).$$

Donc l'application linéaire ψ^{-1} est continue de $(F, \|.\|_F)$ dans $(E, \|.\|_E)$.