CPGE My Youssef, Rabat

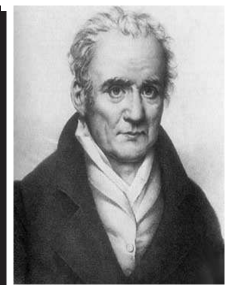
DL 9 Bis (09-10): *Intégration*

6 février 2010

Blague du jour :
Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :
- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !

Mathématicien du jour **Monge**

Gaspard Monge (1746-1818) , est un mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale, de l'École polytechnique de l'École d'arts et métiers.



Source : Concours Mines-Ponts, TSI, 2005.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Avertissement : dans ce problème apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.
Pour une suite de réels $z = (z_n, n \geqslant 1)$, on note $\liminf_n z_n$ (respectivement $\limsup_n z_n$), la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs d'adhérence de z.
On rappelle qu'une suite converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence finie.
Pour une suite de fonctions à valeurs réelles $(f_n(x), n \geqslant 1)$, on note $\liminf_n f_n$ la fonction qui à tout réel x associe $\liminf_n f_n(x)$.

I. Calculs préliminaires

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right) x^2\right). \qquad (A)$$

On note H_0 le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

1) Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) e^{-u^2/2} \, \mathrm{d}u.$$

En particulier
$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$
Montrer que F_f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\left]0, \sqrt{2\pi}\right[$.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait
$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

3) Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout réel x, calculer :
$$\ln\left(\varphi'(x)\right) + \ln\left(f(\varphi(x))\right) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2$$
et
$$\ln\left((\varphi^{-1})'(x)\right) - \ln\left(f(x)\right) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

5) Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer l'identité suivante :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

6) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geqslant A$, on ait :
$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u \geqslant \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$

7) Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geqslant B$, on ait :
$$|\varphi(u)| \leqslant e^{(|u|+1)^2/4}.$$

8) Déterminer une primitive de la fonction
$$u \mapsto \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right) e^{-u^2/2}.$$

9) Calculer l'intégrale suivante
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

II. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :
$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln\left(f(u)\right)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u,$$
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|u - \varphi(u)\right|^2 e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

10) Justifier la convergence de ces deux intégrales.

11) Montrer l'identité :
$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(f(\varphi(u))\right)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

12) Montrer l'égalité suivante :
$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi'(u) - 1 - \ln\left(\varphi'(u)\right)\right) e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \tag{1}$$

13) Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

14) Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

III. Extension aux fonctions positives

On veut maintenant étendre le résultat de la question 13 aux fonctions qui peuvent s'annuler. On considère donc une fonction continue positive g qui satisfait les mêmes hypothèses que f, à la différence près que g peut s'annuler. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = x\ln(x)$, on convient que ψ est prolongée par continuité en 0 par $\psi(0) = 0$.
Pour tout entier $n > 0$, on pose :

$$f_n(u) = \frac{n-1}{n}g(u) + \frac{1}{n}.$$

15) Montrer que $(E(f_n), n \geqslant 1)$ converge vers $E(g)$ quand n tend vers l'infini.

16) Soit φ_n la fonction associée à f_n, comme φ était associée à f dans la question 2. Pour tout réel x, on note

$$\psi_1(x) = \liminf_n \varphi_n(x) \text{ et } \psi_2(x) = \limsup_n \varphi_n(x).$$

Montrer que pour tout réel x et pour $j = 1$ et $j = 2$:

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u. \qquad (2)$$

17) On note respectivement a et b les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des x tels que $g(x) > 0$:

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\} \text{ et } b = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 0\}.$$

Lorsque g est strictement positive au voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$), on obtient $a = -\infty$ (respectivement $b = +\infty$) de sorte que :

$$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty \text{ et que } g = 0 \text{ sur }]-\infty, a] \cup [b, +\infty[.$$

Montrer que pour $j = 1$ et $j = 2$, ψ_j est strictement croissante et

$$\lim_{x\to-\infty} \psi_j(x) = a \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \psi_j(x) = b.$$

18) On note D l'ensemble des points de discontinuité de ψ_1. Pour x élément de D, on note

$$\psi_1(x^+) = \lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} \psi_1(y) \text{ et } \psi_1(x^-) = \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} \psi_1(y).$$

Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$D_\varepsilon = \{x \in D \mid \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \varepsilon\}.$$

On fixe N entier non nul, montrer que le cardinal de $D_{1/N}$ est inférieur à $N(b-a)$.

19) Que peut-on dire du cardinal de D ?

20) Montrer que si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ alors g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$.

21) Montrer que si $g(\psi_1(x)) > 0$ alors ψ_1 est continue en x.

22) Montrer que si ψ_1 est continue en x alors $\psi_1(x) = \psi_2(x)$.

23) Notons C l'ensemble des points de continuité de ψ_1 et K une partie compacte de C. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe dans K des réels $x_0, \ldots, x_{2q+1}$ tels que :
   (a) $K \subset \bigcup_{j=0}^{q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$.
   (b) pour $j \in \{0, \ldots, q\}$, $x_{2j} < x_{2j+1}$ et $\psi_1(v) - \psi_1(u) \leqslant \varepsilon$ quels que soient u et v tels que $x_{2j} \leqslant u \leqslant v \leqslant x_{2j+1}$.

24) Déduire des questions 20 à 23 que $(\varphi_n, n \geqslant 1)$ converge uniformément sur K vers ψ_1.

25) Montrer qu'il existe A et n assez grands tels que pour tout $m \geqslant n$, on ait :

$$\sup_{u\in[-A,A]} |\varphi_m(u)| \leqslant |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1.$$

En déduire que

$$\sup\left\{|u - \varphi_n(u)|^2 \ \mid\ |u| \leqslant A, n \geqslant 1\right\} \text{ est fini.}$$

On note M ce nombre.

26) Montrer que pour tout $A > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-A}^{A} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \int_{-A}^{A} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u.$$

Indication : soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $(\lambda_n, n \geqslant 1)$ la suite des points de discontinuité de ψ_1 dans $[-A, A]$. Pour tout entier p non nul, introduisons

$$J_p = \left]\lambda_p - 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M}, \lambda_p + 2^{-p}\frac{\varepsilon}{M}\right[\text{ et } K = [-A, A] \setminus \bigcup_{p\geqslant 1} J_p.$$

On majorera séparément les intégrales sur K et sur $\bigcup_{p\geqslant 1} J_p$.

27) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Le problème du transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas unidimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - du$ et $u + du$ est donné par $2\exp\left(-u^2/2\right)du$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\exp\left(-u^2/2\right)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse $s(u)$ du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 2 minimise le coût du transport défini par $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|^2 e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre $E(f)$ est appelée l'entropie de Boltzmann.

Fin
À la prochaine