Problèmes Corrigés MP

# Devoir Libre

## Transformée Intégrale (CNC 2005, TSI)

Jeudi 13 Décembre 2012

**Blague du jour**

.
Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :
- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !

**Ibn Battuta, (1304 Tanger-1369 Marrakech)**

Mathématicien du jour

Explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent à l'Inde, la Chine, au Kazakhstan, l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appel Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

## Exercice

① ① Si $c$ et $d$ sont deux réels et $k$ un entier naturel non nul, montrer que

$$\int_0^1 (ct^2+dt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{(2c+d)(-1)^k-d}{k^2\pi^2}.$$

② En déduire qu'il existe un unique couple $(a,b)$ de réels tels que, pour tout entier $k\geq 1$,

$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

③ Calculer alors, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)\,dt$ .

② Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in ]0,\pi[$, $\quad 1+$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)=\frac{\sin\left((2n+1)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

③ Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

① Montrer que, pour tout $\lambda>0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt=\frac{f(0)-f(1)\cos\lambda}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt.$

② En déduire que la fonction $\lambda\longmapsto\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$.

④ On considère la fonction $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par

$$f(t)=\frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)}\quad\text{si}\quad t\neq 0\quad\text{et}\quad f(0)=-\pi.$$

① Montrer que $f$ est continue sur $[0,1]$.

② Justifier que $f$ est dérivable sur $]0,1]$ et que $f'$ possède une limite finie à droite en 0.

③ Montrer alors que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

④ Vérifier que, pour tout $t\in[0,1]$, $\displaystyle(at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)=f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right).$

⑤ En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

# PROBLÈME

## Notations :

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.
Si $f$ est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y''+y=f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

## Première partie

① Montrer que l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

② On note $\Sigma_\lambda$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y''+y=\sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

où $\lambda$ est un réel non nul tel que $\lambda^2\neq1$.

① Montrer qu'il existe un unique réel $a$, que l'on calculera, tel que la fonction

$$S_\lambda: x\longmapsto a\sin(\lambda x)$$

soit un élément de $\Sigma_\lambda$.

② Montrer alors que $\Sigma_\lambda=\{x\longmapsto\alpha\cos x+\beta\sin x+S_\lambda(x)\ ;\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$.

③ Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$ sont toutes $2\pi$-périodiques.

④ Montrer que la fonction $S_\lambda$ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions $2\pi$-périodiques.

## Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt.$$

① Montrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② ① Montrer que, pour tout réel $x$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.

② En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

③ Montrer que $\varphi$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

③ Soit $g$ une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ ; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel $x$,

$$g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$$

④ **Application** : Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geq 0$.

① Vérifier que $h$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.

② En déduire une expression de $h$ puis montrer que, pour tout réel $x$, $h(x+\pi) + h(x) \geq 0$.

⑤ **Cas où $f$ est $2\pi$-périodique**

On revient au cas général et on suppose que $f$ est en plus $2\pi$-périodique.

① Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$.

① Montrer alors que la fonction $\varphi$ est $2\pi$-périodique.

② Montrer que, pour tout réel $x$, $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$.

② Réciproquement, montrer que si $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont $2\pi$-périodiques.

③ Si $f$ est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions $2\pi$-périodiques ?

## Troisième partie

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et possédant une limite finie $\ell$ en $+\infty$.

① ① Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $x \geq A$, $|f(x)| \leq 1 + |\ell|$.

② Montrer alors que $f$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

② ① Justifier que la fonction $f'$ est positive et montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente ; préciser la valeur de cette intégrale.

② En déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\ dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t\, dt$ sont convergentes.

③ ① Montrer que, pour tout réel $x$,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,dt.$$

② En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est de la forme

$$y_{\alpha,\beta} : x \longmapsto f(x) + \left(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\,dt\right)\cos x + \left(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\,dt\right)\sin x,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels.

③ Montrer alors que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

④ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ; on suppose que la solution $y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathcal{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

① En étudiant la suite $\left(y_{\alpha,\beta}(n\pi)\right)_{n\geq 0}$, montrer que $\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$.

② Trouver de même la valeur de $\beta$.

⑤ Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution, notée $Y_f$, ayant une limite finie en $+\infty$ à préciser, et que $Y_f$ est définie par

$$Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Á la prochaine