Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°15

Intégration

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :
- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !

Mathématicien du jour

Ibn Battuta, (1304 Tanger-1369 Marrakech)

Explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent l'Égypte, La Mecque, La Palestine, l'Irak et Iran, l'Inde, la Chine, au Kazakhstan, l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appel Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

1 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$.

a. Donner une relation entre W_{n+2} et ω_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que (W_n) est décroissante et que $W_n \sim W_{n+1}$

c. Montrer que $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, puis que $W_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

2 Formule de Stirling

On pose $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} v_n$ converge.

Indication : chercher un équivalent simple de v_n

b. En déduire que (u_n) converge.

c. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C(\dfrac{n}{e})^n\sqrt{n}$.

d. Exprimer W_{2n} en fonction des factorielles puis en fonction de $\dfrac{u_n^2}{u_{2n}}$ en déduire la valeur de C, puis la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

3 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\omega_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

a Donner une relation entre ω_n et ω_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b Exprimer ω_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c Donner un équivalent simple de ω_n, quand $n \longrightarrow +\infty$.
Indication : On pourra utiliser la relation de Stirling

d En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\omega_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n$.

La constante d'Euler .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone borne entre 0 et 1, donc converge, on notera γ sa limite, appelée constante d'Euler.
Indication : Penser utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$, pour tout $k \geq 2$.

b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$.
Montrer que J_n est bien définie.
On admet dans la suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, qu'il est possible de montrer à l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.

c On pose $K = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$.

d Montrer que K est bien définie.

e Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout rel $x > -1$.

f En déduire que $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$, pour tout $x \in [0, n[$.

g Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, on a : $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.

h En déduire que pour tout

$$\begin{array}{lll} n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \text{on a :} & t + n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \geq -\frac{t^2}{n} \\ n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \text{on a :} & -\frac{t^2}{n} \geq \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \\ n \geq 4, t \in [0, n] & \text{on a :} & \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geq e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \\ n \geq 4, t \in [0, n] & \text{on a :} & 0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n} \end{array}$$

j En déduire que $K = -\gamma$.

Étude d'une suite d'intégrales .

a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

b Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

d Montrer que J_n est bien définie.

e Donner une relation entre J_n et J_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f Exprimer J_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g Donner un équivalent simple de J_n, quand $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

h Montrer que $0 \leq J_n - I_n \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

i En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4 Intégrale de Gauss.

a Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout rel $x > -1$.

b En déduire que $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \leq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall x \in [0, n[$.

c Montrer que, $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}[$.

d en déduire la la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt$.

FIN
À la prochaine