Mamouni My Ismail

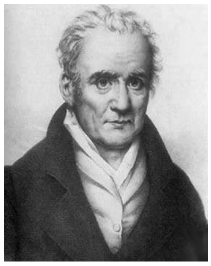
Corrigé Devoir Libre n°16 (Pr Mamouni)

Intégration

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un élève jette un avion en papier qui tombe a coté du prof. Celui-ci le ramasse et se retourne
Tu es nul en maths et tu ne sais même pas faire un avion en papier ! Donne-moi une feuille, je vais t'apprendre au moins une chose dans l'année...



Gaspard Monge (1746-1818)

Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale, de l'École polytechnique de l'École d'arts et métiers.

Mathématicien du jour

Première partie

1 **a** Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b $I(a, b) = -I(b, a)$, trés évident.
Posons : $u = ta$, donc :
$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = I\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

c

i L'application : $f : (x, t) \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x, 0)$ on a : $f(x, t) \sim x - 1$ continue, donc f est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}$.
D'autre part : pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a :
$\left|\dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t} - e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0, +\infty[$, donc φ est continue sur $[1, +\infty[$.

ii Pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

iii D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d) Si $b \geqslant a$, alors $x = \dfrac{b}{a} \geqslant 1$, donc $I(a,b) = I(1, \dfrac{b}{a}) = \varphi\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Si $b \leqslant a$, alors $x = \dfrac{a}{b} \geqslant 1$, donc :

$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1, \dfrac{a}{b}) = -\varphi\left(\dfrac{a}{b}\right) = -\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Conclusion : $I(a,b) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

2 a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t + o(t)$, d'où $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x \in [0,1]$ fixé, on vérifie facilement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en particulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}x^k\right| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d)
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt$$
Car la convergence est uniforme sur [0,1]
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$
$$= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}$$
On divise la somme en deux $n = 2p, n = 2p+1$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}$$
Car $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p)^2} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+2)^2}$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
Car $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p^2}$
$$= \frac{\pi^2}{12}$$

1 a g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.

On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lambda \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\quad \forall t \geqslant A$, donc pour $x \geqslant A$ on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \lambda x\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x \lambda dt\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x (f(t) - \lambda)dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - \lambda|\,dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^A |f(t) - \lambda|\,dt + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\,dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\,dt \\
&\leqslant \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A \frac{\varepsilon}{2}dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x - A}{x} \leqslant 1 \\
&\leqslant \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} = 0
\end{aligned}$$

La réciproque est fausse, prenons pour contre-exemple la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.

c $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \Longrightarrow \forall B > 0,\ \exists A > 0$ tel que $f(t) \geqslant \dfrac{B}{2}\quad \forall t \geqslant A$, donc

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x}\left(\int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt\right) \\
&\geqslant \frac{1}{x}\left(K + \frac{B}{2}(x - A)\right) \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{B}{2} \\
&\geqslant B \quad \mathbf{car} \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{B}{2} = \frac{B}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

d

i Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}
\psi(h)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt && = \frac{1}{x}\left([tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t)dt\right) \\
&= g(x) - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt && = g(x) - \psi(g)(x)
\end{aligned}.$$

ii f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'aprés la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\dfrac{e^{-x}}{x} \sim \dfrac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = \dfrac{1}{x}(1 - e^{-x}) \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow +\infty$.

e $\sqrt{f} \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geqslant 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt &\leqslant \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}\\ &= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}\end{aligned}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2 a Il est clair que $\psi(f+\lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b
$$\begin{aligned} f \in \text{ Ker }(\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0\\ &\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0\\ &\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geqslant 0\end{aligned}$$

Donc ψ est injective.

c D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3 a Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér ordre à coéfficients non constant, dont la solution est :
$f(x) = Ke^{-\displaystyle\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

b f est prolongeable en 0^+si et seulement si $\lim\limits_{x\to} f(x)$ est finie si et seulement si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$si et seulement si 0 $\lambda \leqslant 1$.

4 a 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

b Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Troisième partie

1 a Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| &\leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}\\ &\leqslant M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}\end{aligned}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$(f+\lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f+\lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c

- Symétrie : $(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g,f)$.
- Bilinéarité : $(f+\lambda g, h) = (f,h) + \lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
- Positive : $(f,f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geqslant 0$.
- Définie : $(f,f) = 0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.

2 a $\frac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$.

b $\frac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u = g^2(t), v' = \frac{1}{t^2}$, donc $u' = 2g'(t)g(t)$ et $v = -\frac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\
&\quad \text{car : } \lim_{t\to 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\
&= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\
&\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t)
\end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned}
\int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leqslant 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'aprés (1)} \quad , \\
&\leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}
\end{aligned}$$
D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipschitzienne, donc continue.

3 a

b Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4
$$\begin{aligned}
||\psi(f) - 2f||^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\
&= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f,f) \\
&= ||\psi(f)||^2 - 4(\psi(f), f) + 4||f||^2 \\
&= -4(\psi(f), f) + 8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\
&= -4(\psi(f), f) + 2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\
&= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}
\end{aligned}$$
Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0,1]$.

1 a $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec :
$\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx = \frac{1}{2a}$.

b Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1-e^{-ax}}{ax}$.
Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
(f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx \\
&= \frac{1}{a}I(a,2a) \\
&= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a),\psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1} \\
&= 4a(f_a,\psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie} \\
&= 4\ln a
\end{aligned}.$$

D'où : $\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} = 2\sqrt{\ln a}$.

2 a Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b Au voisinage de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t} \\
&= \int_0^1 \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

c $(\ln t\ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = [\ln t\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Intégration par parties avec :

$u = \ln(1+t)$ $\quad v' = \dfrac{1}{t}$

$u' = \dfrac{1}{1+t}$ $\quad v = \ln t$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t\ln(1+t) \sim t\ln t \longrightarrow 0$

3

4 a les application $f \mapsto ||f||$ et $f \mapsto \psi(f)$ sont continue, or $f \neq 0$, donc l'application $f \mapsto \dfrac{||\psi(f)||}{||f||}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b $\left\{\dfrac{||\psi(f)||}{||f||} \text{ tel que } f \in E_2 - 0\right\}$ est un connexe dans $\mathbb{R}$ en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \dfrac{||\psi(f)||}{||f||} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'aprés la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5 a

i L'application f est définie ainsi :

$$f(t) = \begin{cases} t^s & \text{si : } 0 \leqslant t \leqslant a \\ -a^s(t-a-1) & \text{si : } a \leqslant t \leqslant a+1 \\ 0 & \text{si : } t \geqslant a+1 \end{cases}$$

f^2 est intégrable car son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ est égale à celui sur $[0, a+1]$, avec :

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_0^a t^{2s}dt - a^{2s}\int_a^{a+1}(t-a-1)^2dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

ii D'abord pour $0 \leqslant x \leqslant a$, on a :

$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^s dt = \frac{x^s}{s+1}$, car :

$2s+1 > 0 \Longrightarrow s > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow s+1 > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{s+1} = 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} ||\psi(f)||^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x)dx \geqslant \int_0^a \psi(f)^2(x)dx = \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2}dx \\ &= \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}.\frac{1}{2(s+1)} \geqslant \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)} \end{aligned}$$

car $2(s+1) = 2s+2 > 1$.

iii D'aprés les deux questions précèdentes, en faisant tendre a vers $+\infty$, on aura : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \geqslant \dfrac{2}{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $2s+1 > 0$, donc pour $s \geqslant -\dfrac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\dfrac{1}{2}$, on obtient : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \geqslant 4$, d'où : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \geqslant 2$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \leqslant 2$, d'où l'égalité.

6 a) Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t) = \dfrac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha + 2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned}||f||^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt = \int_0^1 t^{2\alpha}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha+2}}dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1}\end{aligned}$$

b) Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x \geqslant 0$.

1ér cas : $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors :

$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{x}\int_0^x t^\alpha dt = \dfrac{x^\alpha}{\alpha+1}$.

2ème cas : $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned}\psi(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x^\alpha} - 1\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||\psi(f)||^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2}dx + \int_1^{+\infty}\left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2}\end{aligned}$$

c) D'aprés les deux questions précèdentes, on aura : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \leqslant \dfrac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$ pour $\alpha > 0$ assez grand, quand $\alpha \longrightarrow +\infty$, on obtient $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \leqslant 0$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \geqslant 0$, d'où l'égalité.

À la prochaine