Corrigé de la première épreuve de mathématiques
du Concours National Commun 1999 - MAROC
(M.-H. Dehon, lycée Mohamed V)

Première partie

I-1 La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est convergente si et seulement si $s > 1$.

I-2-a Soit $a > 1$; quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^a}$ pour tout $s \geq a$; il s'ensuit que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$, donc uniformément convergente sur cet intervalle.

I-2-b La convergence uniforme sur I de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ entraînerait d'après le théorème de la double limite la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s\to 1^+} \frac{1}{n^s}$; or la série harmonique est divergente ; il n'y a donc pas convergence uniforme sur I.

I-3-a Les fonctions $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ sont continues sur I et la série définissant ζ est uniformément convergente sur tout segment de I d'après I-2-a ; par conséquent, ζ est continue sur I.

I-3-b De façon évidente, la fonction ζ est positive et décroissante ; elle admet donc des limites dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en 1^+ et en $+\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$; pour tout $s \in I$, $\zeta(s) > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$, donc par passage à la limite, $\lim_{s\to 1+} \zeta(s) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$; N étant arbitraire et la série harmonique divergente, on conclut que $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$. Il résulte d'autre part de I-2-a et du théorème de la double limite que $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + 0 + \cdots = 1$.

I-3-c Quel que soit $s > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-s}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, d'où l'encadrement $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$, c'est-à-dire $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. On en déduit que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ pour $s \to 1^+$ (et l'on retrouve que $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$).

I-4-a La série définissant ζ est simplement convergente sur I ; nous allons vérifier que sa série dérivée $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\ln n)}{n^s}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc uniformément sur tout segment de I ; il en résultera que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que $\zeta'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}$ pour tout $s \in I$. Soit $a > 1$ et $\delta = \frac{1}{2}(a-1)$; il existe $C > 0$ tel que $\ln n \leq Cn^{\delta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; alors $0 < \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{C}{n^{1+\delta}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \geq a$; comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < +\infty$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\ln n)}{n^s}$ converge bien normalement sur $[a, +\infty[$.

I-4-b On montre de même par récurrence que ζ est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $\zeta^{(p)}(s) = (-1)^p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^s}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

I-5-a Quel que soit $s>1$, $0<\dfrac{1}{n^s}\leq\displaystyle\int_{n-1}^{n}t^{-s}\,ds$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et par suite, $0<\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^s}\leq\int_{2}^{+\infty}t^{-s}\,dt$, c'est-à-dire $0<\zeta(s)-1-2^{-s}\leq\dfrac{2}{s-1}\cdot 2^{-s}$, ce qui montre que $\zeta(s)-1-2^{-s}=o(2^{-s})$ pour $s\to+\infty$. Le critère de comparaison des séries à termes positifs assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)$ est convergente.

I-5-b D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}n^{-k}\Big)<+\infty$; ainsi la suite double $(n^{-k})_{k,n\geq 2}$ est sommable par paquets, donc sommable, parce qu'à termes positifs, ce qui justifie le calcul suivant :

$$\sum_{n\geq 2}(\zeta(k)-1)=\sum_{k,n\geq 2}n^{-k}=\sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{k\geq 2}n^{-k}\Big)=\sum_{n\geq 2}\frac{n^{-2}}{1-n^{-1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)=1.$$

I-6-a Un calcul immédiat donne pour $x\geq 0$: $P_n(x)=\dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}(-x)^j$.

I-6-b Soit x un réel strictement positif ; $P_n(x)=0$ si et seulement si $\left(\dfrac{\sqrt{x}+i}{\sqrt{x}-i}\right)^{2n+1}=1$, donc si et seulement s'il existe un entier k compris entre $-n$ et n tel que $\dfrac{\sqrt{x}+i}{\sqrt{x}-i}=e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}$; pour que cette dernière relation soit satisfaite, il faut et il suffit que $1\leq k\leq n$ et que $\sqrt{x}=i\dfrac{e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}+1}{e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}-1}=\operatorname{cotg}\dfrac{k\pi}{2n+1}$. Ainsi l'ensemble des racines strictement positives de P_n est $\big\{\operatorname{cotg}^2\dfrac{k\pi}{2n+1};k=1,\ldots,n\big\}$.

I-6-c Le degré de P_n est n ; des questions I-6-b et I-6-a, il résulte alors que le polynôme P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines strictement positives et que la somme des racines de P_n est

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{2n+1}=-\frac{\binom{2n+1}{2n-2}(-1)^{n-1}}{\binom{2n+1}{2n}(-1)^n}=\frac{n(2n-1)}{3}\cdot$$

Comme $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\operatorname{cotg}^2 x$ pour tout $x\in]0,\pi[$, il vient que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}=n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}\cdot$

I-6-d Soit $t\in]0,\pi/2[$. La formule des accroissements finis fournit $t',t''\in]0,t[$ tels que $\operatorname{tg}t=t(1+\operatorname{tg}^2 t')$ et $\sin t=t\cos t''$, ce qui conduit à l'encadrement $\operatorname{cotg}t<\dfrac{1}{t}<\dfrac{1}{\sin t}$.

I-6-e Les questions I-6-c et I-6-d montrent que $\dfrac{n(2n-1)}{3}\Big(\dfrac{\pi}{2n+1}\Big)^2<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{2n(n+1)}{3}\Big(\frac{\pi}{2n+1}\Big)^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On obtient la valeur de $\zeta(2)$ en faisant tendre n vers $+\infty$.

Deuxième partie

II-1-a La fonction $f(t)$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$, est paire ; elle admet donc une série de Fourier de la forme $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt$, avec $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos xt\,dt=\frac{2\sin\pi x}{\pi x}$ et

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos xt\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(x+n)t+\cos(x-n)t)\,dt=(-1)^n\frac{2x\sin\pi x}{\pi(x^2-n^2)}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (les coefficients de Fourier de f sont bien définis de la sorte car $x\notin\mathbb{Z}$).

II-1-b La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$; en vertu du théorème de Dirichlet, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier (au sens de la convergence simple), ce qu'exprime la relation demandée.

II-1-c On applique la relation précédente au point $t = \pi$ et on en multiplie les deux membres par $\dfrac{\pi x}{\sin \pi x}$ ($\sin \pi x \neq 0$ car $x \notin \mathbb{Z}$).

II-2-a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]-n, n[$, $\dfrac{2x^2}{x^2 - n^2} = -2\dfrac{x^2}{n^2}\dfrac{1}{1 - x^2/n^2} = -2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}$. La série entière obtenue converge sur $]-n, n[$ et sa somme n'est pas bornée sur cet intervalle, donc son rayon de convergence est égal à n.

II-2-b Soit $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. D'après II-1-c et II-2-a, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}\Big) = \frac{1 - \pi x \operatorname{cotg} \pi x}{2}$, donc la suite double $\Big(\dfrac{x^{2k}}{n^{2k}}\Big)_{k,n \geq 1}$ est sommable par paquets et par conséquent sommable parce qu'à termes positifs.

II-2-c A partir des formules données en II-1-c et en II-2-a, on obtient pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\pi x \operatorname{cotg} \pi x = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}\Big) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\Big)x^{2k} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k)x^{2k} \ ;$$

le résultat de la question précédente légitime le passage d'une sommation par paquets à l'autre.

II-3 Après avoir multiplié la relation obtenue en II-2-c par $\sin \pi x$, on en tire une égalité entre développements limités pour $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \pi x\Big[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + \frac{\pi^4 x^4}{24} + O(x^6)\Big] &= \Big[1 - 2\zeta(2)x^2 - 2\zeta(4)x^4 + O(x^6)\Big]\Big[\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + \frac{\pi^5 x^5}{120} + O(x^7)\Big] \\ &= \pi x\Big[1 - \Big(2\zeta(2) + \frac{\pi^2}{6}\Big)x^2 + \Big(-2\zeta(4) + \frac{\zeta(2)\pi^2}{3} + \frac{\pi^4}{120}\Big)x^4 + O(x^6)\Big]. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on en déduit les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{2}\Big(\frac{1}{18} + \frac{1}{120} - \frac{1}{24}\Big) = \frac{\pi^4}{90}.$$

II-4-a Soit $x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$; de l'égalité $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, on déduit que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$; en utilisant II-2-c, on obtient alors : $\operatorname{tg} x = \Big(\dfrac{1}{x} - 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)x^{2k-1}}{\pi^{2k}}\Big) - \Big(\frac{1}{x} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)(2x)^{2k-1}}{\pi^{2k}}\Big)$, soit :

$$\operatorname{tg} x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}(2^{2k} - 1)x^{2k-1}.$$

Ce développement vaut évidemment pour $x = 0$.

II-4-b La série entière obtenue est convergente sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et sa somme n'y est pas bornée, donc son rayon de convergence est égal à $\dfrac{\pi}{2}$ (on retrouve ce résultat en notant que si $x > 0$, $\dfrac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}(2^{2k} - 1)x^{2k-1} \sim \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{2x}{\pi}\Big)^{2k}$ pour $k \to \infty$ d'après I-3-b).

II-5-a Les séries entières $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ont 1 pour rayon de convergence ; comme $0 \leq \dfrac{x^n}{(1 - x^n)^2} \leq x^n$

et $0 \leq \dfrac{nx^n}{1-x^n} \leq nx^n$ pour tout $x \in [0,1[$, le critère de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$ sont simplement convergentes sur $[0,1[$.

II-5-b Pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(x^n)^k\Big) = \sum_{k,n\geq 1} nx^{kn} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n(x^k)^{n-1}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2}\ ;$$

on justifie ce calcul comme en I-5-b ou en II-2-b par la sommabilité de la suite double positive $(nx^{kn})_{k,n\geq 1}$.

II-6-a Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\sqrt[n]{1 \cdot x \cdot \dots \cdot x^{n-1}} \leq \frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{n},$$

d'où : $\dfrac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2} \leq \dfrac{x}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Cela montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $[0,1]$.

II-6-b D'après II-5-b, $\displaystyle(1-x)^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2}$ pour $x \in [0,1[$; le théorème de la double limite et les questions II-6-a et I-6-e permettent de conclure.

Troisième partie

III-1 Posons $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$; alors $u_{n-1} - u_n = -\dfrac{1}{n} - \ln\big(1 - \dfrac{1}{n}\big)$ et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\big(1 + \dfrac{1}{n}\big)$; notons que $x - \ln(1+x) = \displaystyle\int_0^{|x|} \frac{|t|}{1+t}\,dt > 0$ pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus \{0\}$; il est donc évident que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite γ ; de plus, $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, donc $0 < \gamma < 1$.

III-2-a et **III-2-b** D'après III-1, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{n} + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\Big) = \sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1 \to \gamma - 1$ pour $n \to \infty$.

III-2-c Comme $x + \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ pour tout $x \in]-1,1[$, il résulte de la question précédente que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kn^k}\Big) = 1 - \gamma$; par conséquent, la suite double positive $\Big(\dfrac{1}{kn^k}\Big)_{k,n\geq 2}$ est sommable par paquets, donc sommable ; mais alors la série de terme général $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{kn^k} = \frac{\zeta(k)-1}{k}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k} = \sum_{k,n\geq 2} \frac{1}{kn^k} = 1 - \gamma$.

III-3-a Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} \sim t^{\alpha-2}$ pour $t \to 0^+$ et $\dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t-1} = O(e^{-t/2})$ pour $t \to \infty$, donc $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

III-3-b Soit $\alpha > 1$. Les sommes partielles de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t^{\alpha-1}$ forment une suite croissante de fonctions continues intégrables sur $]0,+\infty[$ convergeant simplement vers la fonction continue intégrable $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$; le théorème de convergence monotone assure alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}\,dt$; le changement de variable $u = nt$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}\,dt = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où la relation attendue : $\zeta(\alpha)\Gamma(\alpha) = I_\alpha$.

III-4-a Soit $s \geq 1$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t} = s-1$ et que $\dfrac{e^{-t}-e^{-st}}{t} = O(e^{-t})$ pour $t \to +\infty$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-st}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Dans le calcul suivant, la première égalité résulte d'une simple application du théorème de convergence monotone :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}\,dt = \lim_{\rho\to 0^+}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t^{1-\rho}}\,dt = \lim_{\rho\to 0^+}\Gamma(\rho)(1-s^{-\rho}) = \lim_{\rho\to 0^+}\Gamma(1+\rho)\frac{1-e^{-\rho\ln s}}{\rho} = \ln s.$$

III-4-b Il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\,dt - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\,dt = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III-4-c La fonction $\phi : t \mapsto \Big(\dfrac{1}{1-e^{-t}} - \dfrac{1}{t}\Big)e^{-t}$, positive et continue sur $]0,+\infty[$, admet $\dfrac{1}{2}$ pour limite en 0 et décroît exponentiellement en $+\infty$, donc est intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$,

$$\phi(t) = \Big(\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}} - \frac{1-e^{-(n-1)t}}{t}\Big)e^{-t} + \Big(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)e^{-nt} = \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} - \frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t} + (e^t\phi(t)-1)e^{-nt}.$$

Les fonctions $t \mapsto (e^t\phi(t)-1)e^{-nt}$, n décrivant $\mathbb{N}^*$, forment une suite convergeant simplement vers 0 et dominée par la fonction $t \mapsto \phi(t) + e^{-t}$ intégrable sur $]0,+\infty[$; alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}(e^t\phi(t)-1)e^{-nt}\,dt = 0$. Il découle maintenant de III-4-b que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi(t)\,dt = \gamma$.

III-4-d Au moyen d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\phi(t)\,dt = \underbrace{\Big(t + \ln\frac{1-e^{-t}}{t}\Big)e^{-t}\Big|_{0^+}^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty}\ln(1-e^{-t})e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}\,dt\ ;$$

le changement de variable donné par $e^{-u} = 1-e^{-t}$ montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1-e^{-t})e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du$; par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}\,dt = -\gamma$ d'après III-4-c. Rappelons qu'il résulte immédiatement du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}\,dt$.

III-5-a Pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} < -x$; en posant $x = \dfrac{t}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,n[$, on en déduit que $\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^n < e^{-t}$. L'inégalité demandée est évidente pour $t = 0$ ou n.

III-5-b Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $f_n(t) = \begin{cases} \Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^n t^{x-1} & \text{si } 0 < t < n \\ 0 & \text{si } n \leq t \end{cases}$. Alors $(f_n)_n \geq 1$ est une suite de fonctions positives continues sur $]0,+\infty[$ convergeant simplement vers la fonction intégrable $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ et dominée par cette fonction d'après III-5-a. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \Gamma(x)$.

III-5-c Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en commenant par faire le changement de variable $t = nu$:

$$\int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}\Big(\frac{d}{du}\Big)^{n+1}(u^{x+n})\,du}_{1} \ ;$$

la dernière intégrale vaut 1 en vertu de la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale. L'expression de Γ cherchée résulte donc de la question précédente.

III-6 Soit $x > 0$. Un calcul simple montre que

$$\ln \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = x\ln + \sum_{k=1}^n \ln k - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) = -u_n x - \ln x + \sum_{k=1}^n \Big(\frac{x}{k} - \ln\big(1 + \frac{x}{k}\big)\Big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il résulte alors de III-1, de III-5-c et de la continuité du logarithme que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Big(\frac{x}{k} - \ln\big(1 + \frac{x}{k}\big)\Big) = \ln\Gamma(x) + \gamma x + \ln x,$$

c'est-à-dire à la fois la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{x}{k} - \ln\big(1 + \frac{x}{k}\big)\Big)$ et la formule annoncée.

III-7-a La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{x}{n} - \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)\Big)$ est simplement convergente sur $]0, +\infty[$; d'autre part, sa série dérivée $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big)$ est uniformément convergente sur tout segment de $]0, +\infty[$; elle est en fait normalement convergente sur tout intervalle de la forme $]0, a]$ (avec $a > 0$) parce que son terme général $\dfrac{x}{n(n+x)}$ est une fonction positive et majorée par $\dfrac{a}{n^2}$ sur $]0, a]$; compte tenu de III-6, on conclut que $\ln \circ \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (on obtient ainsi une nouvelle preuve du fait que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$) et que

$$(\ln \circ \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big).$$

III-7-b En évaluant la relation précédente en $x = 1$, on retrouve que $\Gamma'(1) = \gamma$. Mettons cette relation sous la forme suivante : $\Gamma'(x) - \Gamma'(1) = -(\Gamma(x) - 1)\gamma + \Gamma(x) \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \Big(-\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+1}\Big)$, soit :

$$\frac{\Gamma'(x) - \Gamma'(1)}{x-1} = -\frac{\Gamma(x) - \Gamma(1)}{x-1}\gamma + \Gamma(x) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)(n+x)} \ ;$$

la dernière série écrite est de façon évidente normalement convergente sur $]0, +\infty[$; en faisant tendre x vers 1, on obtient donc que $\Gamma''(1) = -\Gamma'(1)\gamma + \zeta(2) = \gamma^2 + \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

III-8 Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta(k+1) = 1$, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \zeta(k+1)x^k$ est égal è 1 ; ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{x^k}{n^{k+1}}\Big) < +\infty$, ce qui montre que la suite double positive $\Big(\dfrac{x^k}{n^{k+1}}\Big)_{k,n\geq 1}$ est sommable ; le calcul suivant, à partir de III-7-a, s'en trouve justifié pour $x \in]0, 1[$:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\gamma+\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\big(\frac{x}{n}\big)^k}_{1-\frac{1}{1+\frac{x}{n}}}\Big)=\sum_{k,n\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{n^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^k\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}}_{\zeta(k+1)}\Big).$$

Quatrième partie

IV-1-a La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ est 1 quel que soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

IV-1-b De façon évidente, $S_1(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$; d'autre part,

$$S_{-2}(x)=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\cdot\frac{2}{(1-x)^3}+x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\cdot$$

IV-2 Si $\alpha\leq 1$, $S_\alpha(x)\geq S_1(x)$ pour tout $x\in[0,1[$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}S_\alpha(x)=+\infty$ d'après IV-1-b ; si $\alpha>1$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ est normalement convergente sur $[-1,1]$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}S_\alpha(x)=S_\alpha(1)=\zeta(\alpha)$.

IV-3 Soit $\alpha\in[0,1[$. Pour tout $x\in[0,1[$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt\leq\frac{x^n}{n^\alpha}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$ parce que la fonction $t\mapsto\dfrac{x^t}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$; par sommation, on obtient l'encadrement suivant : $\displaystyle S_\alpha(x)\leq\int_0^{\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt\leq S_\alpha(x)+\int_0^1\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$. Comme $\displaystyle 0\leq\int_0^1\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt\leq\frac{1}{1-\alpha}$ pour tout $x\in[0,1]$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}S_\alpha(x)=+\infty$, il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt=+\infty$ et que $\displaystyle S_\alpha(x)\sim\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt$ pour $x\to 1^-$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^t}{t^\alpha}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-t\ln\frac{1}{x}}t^{-\alpha}\,dt=\Big(\ln\frac{1}{x}\Big)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$ et $\ln\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}-1\sim 1-x$ pour $x\to 1^-$, donc

$$S_\alpha(x)\sim\frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}\cdot$$

IV-4-a Par hypothèse, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\sim\dfrac{\alpha}{x}$ pour $x\mapsto+\infty$; or la fonction $x\mapsto\dfrac{\alpha}{x}$ est positive et n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $\dfrac{f'}{f}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^x\frac{f'(y)}{f(y)}\,dy\sim\int_1^x\frac{\alpha}{y}\,dy$, c'est-à-dire $\ln f(x)=\alpha\ln x+o(\ln x)$ pour $x\to+\infty$; en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

IV-4-b La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ est divergente puisque son terme général tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède.

IV-4-c Il découle de IV-4-a que $\ln f(n)\leq 2\alpha\ln n$, c'est-à-dire $f(n)\leq n^{2\alpha}$, pour tout entier n assez grand ; comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{2\alpha}e^{-nt}$ converge pour tout $t>0$ (d'après IV-1-a par exemple), le critère de comparaison des séries à termes positifs assure qu'il en est de même pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)e^{-nt}$. De façon analogue, $x\mapsto e^{-tx}x^{2\alpha}$ est sommable sur $[0,+\infty[$, donc aussi $x\mapsto e^{-tx}f(x)$.

IV-4-d On raisonne comme en I-3-b ; la fonction $\psi : t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-nt}$ est positive décroissante, donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en 0^+ ; pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t\to 0^+} \psi(t) \geq \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=1}^{N} f(n)e^{-nt} = \sum_{n=1}^{N} f(n)$; il résulte donc de IV-4-b que $\lim_{t\to 0^+} \psi(t) = +\infty$.

IV-5-a Fixons $\lambda > 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ arbitrairement petit ; il existe par hypothèse $x_0 > 0$ tel que $(1-\varepsilon)\frac{\alpha}{x} \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq (1+\varepsilon)\frac{\alpha}{x}$ pour tout $x \geq x_0$; par intégration sur le segment d'extrémités x et λx, on obtient que $\lambda^{(1-\varepsilon)\alpha} \leq \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq \lambda^{(1+\varepsilon)\alpha}$ pour tout $x \geq x_0$ si $\lambda \geq 1$ et que $\lambda^{(1-\varepsilon)\alpha} \geq \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \geq \lambda^{(1+\varepsilon)\alpha}$ pour tout $x \geq \frac{x_0}{\lambda}$ si $\lambda \leq 1$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha$.

IV-5-b L'hypothèse satisfaite par f entraîne que la fonction f' est positive au voisinage de $+\infty$; soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq N$. Alors $\int_{n-1}^{n} f(x)e^{-t(x+1)}\,dx \leq f(n)e^{-nt} \leq \int_{n}^{n+1} f(x)e^{-t(x-1)}\,dx$ pour tout entier $n \geq N+1$, ce qui par sommation conduit à l'encadrement

$$e^{-t}\int_N^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)e^{-nt} \leq e^t \int_N^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx\ ;$$

il s'ensuit que $\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)e^{-nt} \sim \int_N^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx$ pour $t \to 0^+$. Il résulte de IV-4-d que $\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)e^{-nt}$ est un infiniment grand pour $t \to 0^+$; par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-nt} \sim \int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx$.

IV-5-c et **IV-5-d** Il suffit d'après IV-5-b de prouver que $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx \sim \Gamma(\alpha+1)t^{-1}f(t^{-1})$ pour $t \to 0^+$; nous allons donc étudier la limite de $\frac{t}{f(t^{-1})}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{f(t^{-1}y)}{f(t^{-1})}\,dy$ pour $t \to 0^+$. On choisit x_0 comme en IV-5-a pour la valeur $1/2$ de ε, de telle sorte que $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x} \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{3}{2}\frac{\alpha}{x}$ pour tout $x \geq x_0$; on a vu en traitant la question IV-5-a que $\frac{f(t^{-1}y)}{f(t^{-1})} \leq y^{\frac{3}{2}\alpha}$ pour tous $y, t > 0$ vérifiant $t^{-1} \geq x_0$ et $y \geq 1$ (par rapport aux notations de IV-5-a, y joue le rôle de λ et t^{-1} celui de x). Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $t_0 \in]0, x_0^{-1}]$ tel que $f(x) \leq f(t_0^{-1})$ pour tout $x \in [0, x_0]$; par suite, f étant croissante sur $[x_0, +\infty[$, $f(x) \leq f(t^{-1})$ pour tout $x \in [0, t^{-1}]$ si $0 < t \leq t_0$ (on obtient immédiatement cette majoration dans le cas où l'on suppose f croissante). Soit alors

$$\chi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+,\ y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq y < 1 \\ e^{-y}y^{\frac{3}{2}\alpha} & \text{si} \quad 1 \leq y \end{cases} \quad ;$$

χ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après IV-5-a et les considérations qui précèdent, pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $]0, t_0]$ convergeant vers 0, les fonctions $y \mapsto e^{-y}\frac{f(t_n^{-1}y)}{f(t_n^{-1})}$ forment une suite convergeant simplement vers $y \mapsto e^{-y}y^\alpha$ et dominée par χ sur $[0, +\infty[$; le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{f(t^{-1}y)}{f(t^{-1})}\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}y^\alpha\,dy = \Gamma(\alpha+1).$$