Concours National Commun d'Admission aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs - MAROC - 1999

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

corrigé par Gilles Deruelle

* *

Partie I

I-A-1-1

- $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) \in E_u(x)$. En particulier $x = u^0(x) \in E_u(x)$, donc $E_u(x)$ est non vide et non réduit à $\{0\}$.

  $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \lambda P(u)(x) + \mu Q(u)(x) = (\lambda P(u) + \mu Q(u))(x) = (\lambda P + \mu Q)(u)(x)$ montre que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$: $u\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(x)$ avec $Q = XP$, montre que $E_u(x)$ est stable par u.

I-A-1-2

- Le polynôme nul appartient à $\mathcal{I}_x$.

  Soit $P \in \mathcal{I}_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$; $PQ(u)(x) = QP(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(0) = 0$. Donc $PQ \in \mathcal{I}_x$ et $\mathcal{I}_x$ est bien un idéal de $\mathbb{K}[X]$

  $\mathcal{I}_x \neq \{0\}$: par exemple χ_u, $\pi_u \in \mathcal{I}_x$.

- (Même calcul que ci-dessus) Soit $P \in \mathcal{I}_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$; $P(u)\big(Q(u)(x)\big) = PQ(u)(x) = QP(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(0) = 0$, ce qui montre bien que la restriction de $P(u)$ à $E_u(x)$ est l'endomorphisme nul de $E_u(x)$.

- L'existence de π_x découle du fait que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal. L'unicité de la condition imposée : π_x unitaire. Il est clair que π_x n'est pas nul puisque $\mathcal{I}_x \neq \{0\}$. Par ailleurs $\pi_x = 1 = X^0$ impliquerait $u^0(x) = x = 0$ ce qui n'est pas. Finalement $\deg(\pi_x) \geq 1$.

- Supposons $\deg(\pi_x) = 1$ c'est à dire π_x de la forme $X - \lambda$: alors $u(x) - \lambda x = 0$; ce qui montre que x est un vecteur propre de u - associé à la valeur propre λ.

  Réciproquement si $u(x) = \lambda x$, le polynôme $P = X - \lambda$ vérifie $P(u)(x) = 0$.
  Donc $P \in \mathcal{I}_x$ et P divise π_x ; comme $\deg(P) = 1$ et $\deg(\pi_x) \geq 1$, $P = \pi_x$ (P et π_x sont unitaires).

  En conclusion : $\deg(\pi_x) = 1$ si et seulement si x est un vecteur propre de u.

I-A-1-3

$\mathcal{B}_x$ est libre : une condition de dépendance linéaire non triviale de $x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)$ donnerait un polynôme P non nul et de degré strictement inférieur à k vérifiant $P(u)(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec la nature de π_x.

$\mathcal{B}_x$ est génératrice : soit $P(u)(x) \in E_u(x)$, puis $P = \pi_x Q + R$ avec $\deg(R) < k$.
On a $P(u)(x) = R(u)(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$.

I-A-1-4

– Ecrivons $\pi_x = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$. Le fait que $\pi_x(u)(x) = 0$ entraîne $u^k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j u^j(x)$.

On obtient $\text{Mat}(u_x; \mathcal{B}_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}$

– Pour tout $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $\pi_x(u_x)(u^j(x)) = \pi_x(u) \circ u^j(x) = u^j \circ \pi_x(u)(x) = u^j(0) = 0$ et donc $\pi_x(u_x) = 0$, ce qui implique que le polynôme minimal de u_x divise π_x.

Par ailleurs tout polynôme P annulateur de u_x vérifiant $P(u_x)(x) = P(u)(x) = 0$, appartient à $\mathcal{I}_x$; donc π_x divise P et en particulier π_x divise le polynôme minimal de u_x. Ces deux polynômes étant unitaires ...

I-A-1-5

(i) Pour $u = \lambda.Id_E$, $\pi_u = \pi_x = X - \lambda$ pour tout $x \neq 0$.

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3).

On a pour $x = e_1$, $\pi_x = X - 1$. Par ailleurs $\pi_u = X^2 - 1$ et $\chi_u = (X-1)(X+1)^2$.

La question $I - A - 1 - 2$ montre que $E_u(x) \subset \ker \pi_x(u)$ puisque la restriction à $E_u(x)$ de $\pi_x(u)$ est nulle. Mais cette inclusion peut très bien être stricte comme le montre l'exemple (ii) avec $x = e_2$: $\pi_x = X + 1$ et $\ker \pi_x(u) = \ker(u + e) = \text{Vect}(e_2, e_3)$, alors que $E_u(x) = \mathbb{R}e_2$.

I-A-2-1

On peut écrire $\pi_a = R_1^{\beta_1} \dots R_k^{\beta_k}$ et $\pi_b = R_1^{\gamma_1} \dots R_k^{\gamma_k}$ avec $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \beta_i$ et $\gamma_i \in \mathbb{N}$ et où $R_1, \dots, R_k$ sont les facteurs irréductibles intervenant dans les décompositions de π_a et de π_b.

Posons $P_1 = \prod_{i \in I} R_i^{\beta_i}$ et $Q_1 = \prod_{j \in J} R_j^{\gamma_j}$ où $I = \{i / \beta_i \geq \gamma_i\}$ et $J = \{j / \beta_j < \gamma_j\}$.

On a bien $P_1 Q_1 = \text{ppcm}(\pi_a, \pi_b)$ et $\text{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$; il ne reste plus qu'à prendre $P_2 = \dfrac{\pi_a}{P_1}$ et $Q_2 = \dfrac{\pi_b}{Q_1}$.

I-A-2-2

Soit $c = P_2(u)(a) + Q_2(u)(b)$.

- Le fait que $P_1 Q_1(u)(c) = 0$ est immédiat et donc π_c divise $P_1 Q_1$.

- Si $P(u)(c) = 0$, $P_1 P(u)(c) = P_1 Q_2 P(u)(b) = 0$ et donc $\pi_b = Q_1 Q_2$ divise $P_1 Q_2 P$, ce qui entraîne Q_1 divise P du fait que P_1 et Q_1 sont premiers entre eux. On montre de même que P_1 divise P et finalement $P_1 Q_1$ divise P. En conclusion $\pi_c = P_1 Q_1 = \text{ppcm}(\pi_a, \pi_c)$.

I-A-3

Soit $P = \text{ppcm}(\pi_{e_1}, \dots, \pi_{e_n})$. Le fait que $P(u) = 0$ s'obtient sans difficultés en appliquant $P(u)$ à tout vecteur de E écrit dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On en déduit que π_u divise P.

Par ailleurs pour tout i, π_{e_i} divise π_u ; d'où P divise π_u.

En conclusion $P = \pi_u$.

Le résultat du $I - A - 2 - 2$ s'étend sans difficultés - associativité du ppmc et récurrence - au cas d'un nombre quelconque de vecteurs non nuls. Il existe donc $x \in E$ tel que $\pi_x = P$.

I-A-4

On peut écrire $\pi_u = PQ$. Notons alors $y = Q(u)(x)$ où x est tel que $\pi_x = \pi_u$.

D'une part, $P(u)(y) = PQ(u)(x) = \pi_x(u)(x) = 0$ montre que π_y divise P.

D'autre part, $\pi_y(u)(y) = \pi_y Q(u)(x) = 0$ montre que $\pi_u = PQ$ divise $\pi_y Q$ donc que P divise π_y.

I-A-5

- $\pi_K(A) = 0$ suffit pour donner π_L divise π_K.

- Soit $k = \deg(\pi_K)$. D'après ce qui précède, il existe $V \in \mathbb{K}^n$ tel que $\pi_V = \pi_K$. On sait alors que $(V, AV, \ldots, A^{k-1}V)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$, donc dans $\mathbb{L}^n$ (raisonner avec les déterminants extraits ...) ; ceci a pour conséquence $\deg(\pi_L) \geq k$. Finalement $\deg(\pi_L) = k$ et $\pi_K = \pi_L$

I-B-1

Prendre $x = e_1 + \ldots + e_n$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Le déterminant de $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est un déterminant de Vander-Monde , donc non nul puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

$(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ étant alors une base de E, il est immédiat que $E_u(x) = E$.

I-B-2

Si $E = E_u(x)$, $\dim(E_u(x)) = \deg(\pi_x) = n$ et comme π_x divise π_u qui divise χ_u, on a bien $\pi_u = \chi_u$.

Supposons $\pi_u = \chi_u$. Soit $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$. On a donc $\dim(E_u(x)) = \deg(\pi_u) = \deg(\chi_u) = n$ qui montre que $E_u(x) = E$.

I-B-3

Soit $P \in \mathcal{I}_F$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $PQ(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) \in F$ puisque F est stable par u donc par $Q(u)$. Donc $PQ \in \mathcal{I}_F$ et $\mathcal{I}_F$ est bien un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si $F = \{0\}$, $\mathcal{I}_F = \mathcal{I}_x = \big(\pi_x\big)$. Si $F = E$, $\mathcal{I}_F = \mathbb{K}[X]$ et réciproquement. Notons enfin que $\mathcal{I}_F$ contient toujours $\mathcal{I}_x$ puisque F contient toujours $\{0\}$. $\mathbb{K}[X]$ étant principal, il existe un polynôme unitaire R (de degré supérieur ou égal à un si $F \neq E$) tel que $\mathcal{I}_F = \big(R\big)$.

On a $F = \{P(u)(x) \ / \ P \in \mathcal{I}_F\} = \{RQ(u)(x); Q \in \mathbb{K}[X]\} = \{Q(u)(R(u)(x)); Q \in \mathbb{K}[X]\}$ ce qui montre que $F = E_u(y)$ avec $y = R(u)(x)$.

I-B-4-1

– $\ker P(u) = \{0\}$ signifierait $P(u)$ bijectif et donc impliquerait $Q(u) = 0$, ce qui est contradiction avec la nature de $\pi_u = PQ$. De même $\ker Q(u)$ ne peut être réduit à $\{0\}$.

– Notons $F = \ker P(u)$, $G = \ker Q(u)$, $F' = \mathrm{Im} P(u)$, $G' = \mathrm{Im} Q(u)$.

  F, F', G, G' sont stables par u et l'on a $G' \subset F$ et $F' \subset G$ ce qui entraîne $\pi_{v'}$ divise π_w (qui divise Q) et $\pi_{w'}$ divise π_v (qui divise P).

  Par ailleurs $\pi_{w'}(u) \circ Q(u) = 0$, donc $\pi_u = PQ$ divise $\pi_{w'}Q$ d'où l'on tire P divise $\pi_{w'}$. En définitive $\pi_{w'} = \pi_v = P$. De même $\pi_{v'} = \pi_w = Q$.

– Comme E est u-monogène, les sous-espaces $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ qui sont stables par u sont aussi monogènes d'après la question précedente. La dimension de ces sous-espaces est donc égale respectivement à $\deg(\pi_v) = \deg(P)$ et $\deg(\pi_w) = \deg(Q)$.

  On notera que le résultat reste vrai si $P = \pi_u$, $Q = 1$ puisqu'alors $P = \pi_u = \chi_u$: $\deg(P) = n$ et $F = E$...

I-B-4-2

Soit F un sous-espace stable par u et $v = u_{/F}$.

Alors π_v divise π_u et $F \subset \ker \pi_v(u)$. Egalement $\deg(\pi_v) \leq \dim(F)$.

Or d'après la question précedente, $\deg(\pi_v) = \dim(\ker \pi_v(u))$. Il vient donc : $\dim(F) \leq \dim(\ker \pi_v(u)) = \deg(\pi_v) \leq \dim(F)$ d'où l'on tire $F = \ker \pi_v(u)$.

Tout sous-espace stable par u s'écrit donc sous la forme $\ker P(u)$ où P est un diviseur de π_u. On obtient ainsi un nombre fini de sous-espaces stables par u.

Partie II

II-1-1

- Supposons F irréductible : soit alors $x \in F$, $x \neq 0$; $E_u(x)$ est un sous-espace de F non réduit à $\{0\}$ et stable par u ; puisque F est irréductible, $E_u(x) = F$ et F est bien monogène.

  Soit $\pi_v = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en produit de facteurs irréductibles de π_v. La question I-B-4-1 a montré que $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\ker P_i^{\alpha_i}(v) \neq \{0\}$ et ces sous-espaces sont stables par u.

  On ne peut avoir $r \geq 2$ car alors, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i^{\alpha_i}(v)$ et F serait décomposable , donc réductible.

  On peut donc écrire $\pi_v = P^\alpha$ avec P irréductible et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Comme ci-dessus $G = \ker P(v)$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$ et stable par u : on a $G = F$ du fait que F est irréductible, ce qui entraîne $P(v) = 0$ et donc $\pi_v = P$ et $\alpha = 1$. En conclusion π_v est bien irréductible.

- Réciproquement soit $F = E_u(x)$ tel que $\pi_v = P$ avec P irréductible. Soit G un sous-espace de F stable par u et non réduit à $\{0\}$. Le polynôme minimal de $u_{/G}$ divise P donc est égal à P. Comme F est monogène, de même que G (cf. I-B-3) , il vient : $\dim(F) = \deg(P) = \dim(G)$. Finalement $G = F$ et F est bien irréductible.

II-1-2

- Supposons $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ avec $F_1, \ldots, F_r$ irréductibles. Notons $u_i = u_{/F_i}$ et $\pi_i = \pi_{u_i}$. Soit π le produit des π_i où chaque facteur n'apparaît qu'une fois exactement.

  π est annulateur de u : soit $x = x_1 + \cdots + x_r \in E$; $\pi(u)(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \pi(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \pi(u_i)(x_i) = 0$ car pour tout i, $\pi(u_i) = 0$ puisque π_i divise π. En conséquence π divise π_u et π_u a bien la forme souhaitée.

- Réciproquement supposons $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P_i$ avec $P_1, \ldots, P_r$ irréductibles et deux à deux distincts. On a par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Il suffit de montrer que pour tout i, F_i est somme directe de sous-espaces irréductibles.

  Soit $F = \ker P(u)$ l'un de ces sous-espaces. Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\ker P(u) \backslash \{0\}$ telles que la somme $\displaystyle\sum_{x \in \mathcal{F}} E_u(x)$ soit directe. $\mathcal{F}$ n'est pas vide car contient tout singleton constitué par un vecteur non nul de F. Puis notons $\mathcal{C} = \{\text{card} A | A \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{C}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ majorée par $\dim(F)$: elle admet donc un plus grand élément que nous noterons p. Soient alors $y_1, \ldots, y_p$ des éléments de F tels que la somme $\sum_{j=1}^{p} E_u(y_j)$ soit directe et $G = \bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j)$.

Supposons que $G \not\subseteq F$. Soit alors $y \in F, y \notin G$:

- $E_u(y)$ est irréductible : π_y divise $\pi_{u_{/F}} = P$ donc $\pi_y = P$ et d'après II-1-1 , $E_u(y)$ est irréductible.
- $E_u(y) \cap G$ est un sous-espace de $E_u(y)$ stable par u, donc réduit à $\{0\}$ puisque $E_u(y)$ est irréductible. Ceci contredit la définition de p car alors la somme $E_u(y) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j) \right)$ serait directe.

En conclusion $F = \ker P(u) = \bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j)$ est bien somme directe de sous-espaces irréductibles (on montre comme ci-dessus que pour tout j, $E_u(y_j)$ est irréductible).

II-2

La linéarité de $\tilde{u}$ est immédiate.

Soit $P = \sum_k a_k X^k$; on a $P(\tilde{u})(f) = \sum_k a_k \tilde{u}^k(f) = \sum_k a_k (f \circ u^k) = f \circ \sum_k a_k u^k = f \circ P(u)$

L'égalité ci-dessus montre que si $P(u) = 0$, $P(\tilde{u})(f) = 0$ pour toute $f \in E^*$, donc que $P(\tilde{u}) = 0$.

Réciproquement si $P(\tilde{u}) = 0$, on obtient : $\mathrm{Im} P(u) \subset \bigcap_{f \in E^*} \ker f = \{0\}$ (prendre n formes linéaires indépendantes ...). En conclusion $P(u) = 0$.

L'équivalence $P(u) = 0 \iff P(\tilde{u}) = 0$ donne immédiatement $\pi_u = \pi_{\tilde{u}}$.

II-3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $A = \mathrm{Mat}(u; \mathcal{B}) = [a_{ij}]_{i,j}$ et $B = \mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*) = [b_{ij}]_{i,j}$.

On a : $\tilde{u}(e_j^*)(e_k) = (\sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \delta_{ik} = b_{kj} = e_j^* \circ u(e_k) = e_j^* (\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \delta_{ij} = a_{jk}$

D'où $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*) = {}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$.

On retrouve ainsi que u et $\tilde{u}$ ont même polynôme minimal , puisqu'il en est ainsi pour A et ${}^tA$: il suffit de constater que pour pour polynôme P, $P({}^tA) = {}^tP(A)$ et donc $P(A) = 0 \iff P({}^tA) = 0$ ...

II-4-1

Puisque $\pi_{\tilde{u}} = \pi_u = P^\alpha$, $P^{\alpha-1}(\tilde{u}) \neq 0$: il existe donc $g \in E^*$ tel que $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g) \neq 0$ ...

II-4-2

- π_g divise $\pi_{\tilde{u}} = P^\alpha$ et $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g) \neq 0$: donc $\pi_g = P^\alpha$.
- π_y divise $\pi_u = P^\alpha$ et $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g)(y) = g \circ P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$, donc $P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$: d'où $\pi_y = P^\alpha$.

II-4-3

- Le fait que G est un sous-espace est immédiat (indépendamment d'ailleurs de la nature de $\mathcal{H}$).

- G est stable par u : soit $x \in G$ et $Q(\tilde{u})(g) \in \mathcal{H}$; alors $Q(\tilde{u})(g)(u(x)) = g \circ Q(u)(u(x)) = g \circ P(u)(x) = P(\tilde{u})(g)(x) = 0$ ($P = XQ$) puisque $x \in G$. Donc $u(x) \in G$.

- Par ailleurs $\dim(\mathcal{H}) = \deg(\pi_g) = \deg(P^\alpha)$ que nous noterons k. Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\mathcal{H}$.
L'application qui à tout $x \in E$, associe $(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in K^k$ a un noyau de dimension k puisque $(f_1, \ldots, f_k)$ est libre (c'est du cours ...). Il ne reste plus qu'à montrer que G est précisément le noyau de cette application , ce qui ne pose pas de problème.

II-4-4

- x sécrit sous la forme $p(u)(y)$; une division euclidienne donne $p = P^\alpha T + S$ avec $S = P^\beta Q$ où $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$ et pgcd$(P, Q) = 1$. On obtient bien $x = P^\beta Q(u)(y)$ puisque $\pi_u = P^\alpha$.

- Le théorème de Bezout donne l'existence de deux polynômes R et R_1 tels que $RQ + R_1 P = 1$. Il vient alors : $P^{\alpha-1-\beta} R(\tilde{u})(g)(x) = g \circ P^{\alpha-1-\beta}(u) \circ R(u)\big(P^\beta(u) \circ Q(u)(y)\big) = g \circ P^{\alpha-1}(u) \circ RQ(u)(y) = g \circ P^{\alpha-1}(u)\big(y - R_1 P(u)(y)\big) = g \circ P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$ d'après II-4-1 et car $P^\alpha(u)(y) = 0$.

II-4-5

- Le résultat précedent a pour conséquence que pour tout $x \in F \backslash \{0\}$, $x \notin G$, puisque $R(\tilde{u})(g)(x) \neq 0$. Autrement dit $F \cap G = \{0\}$.

- Par ailleurs codim $G = k = \deg(P^\alpha) = \deg(\pi_u) = \dim(F) = \dim(E) - \dim(G)$. On en déduit que $E = F \oplus G$.

- Par récurrence sur $n = \dim(E)$. Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\leq n$, ayant pour polynôme minimal une puissance d'un polynôme irréductible.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension $n + 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi_u = P^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible.

D'après la question précedente, on peut trouver $y \in E \backslash \{0\}$ et G un sous-espace de E stable par u tels que $\pi_y = P^\alpha$ et $E = E_u(y) \oplus G$. Si $E = E_u(y)$, c'est fini ; sinon $\pi_{u_{/G}}$ divise $\pi_u = P^\alpha$, donc $\pi_{u_{/G}} = P^\gamma$ avec $1 \leq \gamma \leq \alpha - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors à $v = u_{/G}$ et G est somme directe de sous-espaces v-monogènes, donc u-monogènes, ce qui est suffisant. Enfin la récurrence se fonde de façon triviale en $n = 1$ puisque tout espace de dimension un est monogène.

II-5

Soit $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ (notations claires). On a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ avec $\forall i, N_i \neq \{0\}$.

D'après I-B-4-1, $\pi_{u_{/N_i}} = P_i^{\alpha_i}$: la question précédente montre alors que pour tout i, N_i est somme directe de sous-espaces u_i-monogènes (où $u_i = u_{/N_i}$), donc u-monogènes.

II-6-1

– supposons F indécomposable ; le même raisonnement qu'au début de la question II-1-1 montre que $\pi_v = P^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible. D'après la question précédente, F est somme directe de sous-espaces v-monogènes, donc u-monogènes : mais comme F est indécomposable, F est lui-même monogène.

– Réciproquement supposons $F = E_u(x)$ et $\pi_v = P^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible.

  Supposons de plus $F = G \oplus H$ avec G, H stables par u et non réduit à $\{0\}$. D'après I-B-3, G et H sont v-monogènes, donc u-monogènes. On peut écrire $\pi_{u_{/G}} = P^\beta$, $\pi_{u_{/H}} = P^\gamma$ avec $0 < \beta \leq \alpha$ et $0 < \gamma \leq \alpha$.
  L'hypothèse $\beta = \alpha$ conduit à $\dim(G) = \deg(P^\beta) = \deg(P^\alpha) = \dim(F)$ puisque F est monogène (cf. question I-B-4-1), donc à $F = G$ ce qui n'est pas. On en déduit $\beta < \alpha$. De même $\gamma < \alpha$.
  Mais alors, P^β et P^γ divisant $P^{\alpha-1}$, $P^{\alpha-1}$ serait annulateur de v (appliquer $P^{\alpha-1}(v)$ à $x = x_G + x_H$ $\ldots$) ce qui contredit $\pi_v = P^\alpha$. Finalement F est indécomposable.

II-6-2

Reprenons les notations de la question II-5 ; pour tout i, N_i est somme directe de sous-espaces monogènes F_{ij}. Pour tout (i, j), le polynôme minimal de $u_{/F_{ij}}$ divise $P_i^{\alpha_i}$, donc est de la forme $P_i^{\beta_{ij}}$ avec $0 < \beta_{ij} \leq \alpha_i$. Ceci entraîne que tous les F_{ij} sont indécomposables puisque monogènes et de polynôme minimal $P_i^{\beta_{ij}}$, d'après la question II-6-1.

Partie III

III-A-1-1

X^k est annulateur de u, donc π_u qui divise X^k est de la forme X^r avec $1 \le r \le n$. On a bien $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$ par définition de π_u.

III-A-1-2

La question II-4 a montré l'existence de $e_1 \in E$ et d'un sous-espace G stable par u (ici $P = X$ et $\alpha = r$) tels que $E = E_u(e_1) \oplus G$ et $\pi_{e_1} = X^r$. On a bien $\dim(E_u(e_1)) = r$ et $(e_1, u(e_1), \dots, u^{r-1}(e_1))$ est une base de $E_u(e_1)$.

III-A-1-3

Par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- pour $n = 1$, le résultat est trivial.

- supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension n.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice r ($\pi_u = X^r$).

Avec les notations de la question précédente, on a donc $E = E_u(e_1) \oplus G$.
G étant stable , $(u_{/G})^r = u^r_{/G} = 0$. Il existe donc $r_2 \le r_1 = r$ tel que le polynôme minimal de $u_{/G}$ soit X^{r_2}.
Par hypothèse de récurrence il existe une base b de G relativement à la quelle la matrice de $u_{/G}$ s'écrit sous la forme diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_2 & 0 & & \\ 0 & J_3 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ avec J_2 de taille r_2 etc. ...

Relativement à la base $\mathcal{B}$ obtenue par adjonction de la base $(e_1, u(e_1), \dots, u^{r-1}(e_1))$ de $E_u(e_1)$ et de la base b de G, la matrice s'écrit sous la forme voulue $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ puisque $\mathrm{Mat}(u_{e_1}; e_1, \dots, u^{r-1}(e_1)) = J_1$ d'après la question I-A-1-4 ($\pi_{e_1} = X^r = X^{r_1}$).

III-A-2-1

π_u divise $X^k - 1$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples : u est donc diagonalisable. E est évidemment somme directe de sous-espaces irréductibles puisque toute droite propre est irréductible (les facteurs irréductibles de π_u sont bien sûr de mulitiplicité un).

E n'est pas nécessairement monogène : par exemple $u = -Id_E$, $u^2 = Id_E$.

III-A-2-2

π_u est un polynôme à coefficients réels qui divise $X^k - 1$: ses facteurs irréductibles, tous de multiplicité un, sont $X - 1$ ou $X + 1$ ou de la forme $X^2 + 2aX + b$ avec $a^2 - b < 0$. D'après la question II-1-2 , E est somme directe de sous-espaces irréductibles.

π_u s'écrit sous la forme $\pi_u = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta Q$ avec $\alpha = 0$ ou 1 , $\beta = 0$ ou 1 , $Q = \prod_i P_i$ ou 1 et $\forall i, P_i = X^2 + 2a_iX + b_i$, $a_i^2 - b_i < 0$. On obtient donc, par exemple dans le cas $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $Q = \prod_{i=1}^{k} P_i$,

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)\Big)$$

Si $x_i \in \ker P_i(u), x_i \neq 0$, π_{x_i} divise $\pi_{u_i} = P_i$ (cf. question I-B-4-1) où $u_i = u_{/\ker P_i(u)}$. Donc $\pi_{x_i} = P_i$ et $\dim(E_u(x_i)) = \deg(P_i) = 2$. En conséquence (cf. question II-1) $\ker P_i(u)$ s'écrit comme somme de plans irréductibles.

On obtient dans une base adaptée une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & & & \\ 0 & -I_q & 0 & & \\ & 0 & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

III-B-1-1

D'après II-2 , u et $\tilde{u}$ ont même polynôme minimal. Par ailleurs puisque E est monogène, $\chi_u = \pi_u$ (question I-B-2). Enfin d'après la question II-3 , u et $\tilde{u}$ ont même polynôme caractéristique puisque c'est le cas d'une matrice et de sa transposée : en conséquence $\pi_{\tilde{u}} = \chi_{\tilde{u}}$ et toujours en vertu de la question I-B-2, E^* est monogène. D'où l'existence de $f \in E^*$ telle que $E^* = {E^*}_{\tilde{u}}(f)$.

III-B-1-2

Supposons $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \tilde{u}^i(e^*_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e^*_{n-1} \circ u^i = 0$.

En appliquant en x ilvient : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e^*_{n-1} \circ u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e^*_{n-1}(e_i) = \alpha_{n-1} = 0$.

Supposons $\alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_{n-k} = 0$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k-1} \alpha_i e^*_{n-1} \circ u^i(u^k(x)) = \sum_{i=0}^{n-k-1} \alpha_i e^*_{n-1}(e_{i+k})$ $= \alpha_{n-k-1} = 0$. On obtient donc par récurrence : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \alpha_i = 0$.

III-B-1-3

On sait (question II-3) que $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*) = {}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$.

Par ailleurs $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; b)$ où $b = (e^*_{n-1}, \tilde{u}(e^*_{n-1}), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(e^*_{n-1}))$ est égale à $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ car $\pi_{\tilde{u}} = \pi_{e^*_{n-1}} = \pi_u = \pi_x$ (cf. question I-A-1-4 : ces matrices sont entièrement déterminées par le polynôme minimal).

Comme les matrices $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*)$ et $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; b)$ sont semblables, il en est de même des matrices ${}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$.

<u>Remarque</u> : la question B-1-3 se traite de la même manière avec $f \in E^*$ (non déterminée explicitement) comme au B-1-1 et $b = (f, \tilde{u}(f), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(f))$ ...

III-B-2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ associé à A via la base canonique de $\mathbb{K}^n$. K^n est somme directe de sous-espaces monogènes d'après la question II-5 : $K^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i$. Notons $\mathcal{M}_i = E_u(x_i)$ et $\mathcal{B}_i = (x_i, u(x_i), \ldots, u^{d_i - 1}(x_i))$ où $d_i = \dim(\mathcal{M}_i)$ et $u_i = u_{/\mathcal{M}_i}$.

D'après la question précèdente, pour tout i, ${}^t\mathrm{Mat}(u_i, \mathcal{B}_i)$ est semblable à $\mathrm{Mat}(u_i, \mathcal{B}_i)$.

Soit $\mathcal{B}$ la base de K^n obtenue par adjonction des bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$, que l'on peut noter $\mathcal{B} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$: il est immédiat de vérifier que ${}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ est semblable à $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$, ces matrices étant “transposées par blocs”, puis “semblables par blocs ”.

Enfin $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ est semblable à A et ${}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ est semblable à ${}^tA$. Finalement A et ${}^tA$ sont semblables.