DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 4 heures

Option MP

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

– $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
  On note $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E et Id_E l'application identité de E.
– E^* désigne le dual de E, c'est à dire $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $\mathcal{B}^*$ sa base duale.

– Pour tout endomorphisme u de E et tout vecteur non nul x de E, on note :

$$E_u(x) = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

On notera π_u (resp. χ_u) le polynôme minimal (resp. caractéristique) de u

. On conviendra que : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det\,(\lambda Id_E - u)$; en particulier χ_u est unitaire.

– Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On dira :
  . que F est *irréductible* si les seuls sous-espaces de F stables par u sont $\{0\}$ et F.
  . que F est *indécomposable* s'il n'existe pas de décomposition de F en somme directe de deux sous-espaces stables par u et non réduits à $\{0\}$.
– Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par P sera noté (P).

Partie I

A - Sous-espaces monogènes et polynôme minimal.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $x \neq 0$.

   1-1 Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et stable par u.

   Un tel sous-espace de E sera dit *u-monogène* (ou simplement *monogène* s'il n'y a pas d'ambiguité).

   1-2 On considère l'ensemble $\mathcal{I}_x$ des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.

   Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$ et que si $P \in \mathcal{I}_x$, $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.

   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré supérieur ou égal à un - que l'on notera π_x - tel que $\mathcal{I}_x = (\pi_x)$.

   Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur x et u pour que $\deg(\pi_x) = 1$.

1-3 Montrer que $\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\big)$ où $k = \deg(\pi_x)$ est une base de $E_u(x)$.

1-4 On note u_x l'endomorphisme de $E_u(x)$ induit par u et $\pi_x = X^k - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.

Préciser $\mathrm{Mat}(u_x; \mathcal{B}_x)$ à l'aide de π_x.

Montrer que le polynôme minimal de u_x est π_x.

1-5 Donner un exemple dans le cas $n \geq 2$:

(i) où $\pi_x = \pi_u$.

(ii) où π_x divise strictement π_u et π_u divise strictement χ_u.

D'une manière générale, peut-on affirmer que $E_u(x) = \ker \pi_x(u)$?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

2-1 Soient a et b deux vecteurs non nuls de E. En utilisant les décompositions en produit de facteurs irréductibles de π_a et π_b, montrer qu'il existe des polynômes P_1, P_2, Q_1 et Q_2 tels que :

(i) $\pi_a = P_1 P_2$ et $\pi_b = Q_1 Q_2$.

(ii) $\mathrm{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$.

(iii) $\mathrm{ppcm}(\pi_a, \pi_b) = P_1 Q_1$.

2-2 Soit $c = P_2(u)(a) + Q_2(u)(b)$. Montrer que $\pi_c = \mathrm{ppcm}(\pi_a, \pi_b\ )$.

3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Montrer que $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{e_1}, \ldots, \pi_{e_n})$.

En déduire l'existence d'un vecteur x de E tel que $\pi_x = \pi_u$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un diviseur unitaire de π_u. Montrer l'existence de $y \in E$ tel que $\pi_y = P$.

5. *On donne dans cette question une application du résultat de la question* 3 :

On considère deux sous-corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note π_K (respectivement π_L) le polynôme minimal de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$).

Montrer tout d'abord que π_L divise π_K, puis en utilisant le résultat de la question 3, montrer que $\pi_L = \pi_K$.

B - Cas où E est u-monogène. Sous-espaces stables par u d'un espace u-monogène.

1. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme diagonalisable de E et que ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. Montrer que E est u-monogène et déterminer $x \in E$ tel que $E = E_u(x)$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) E est u-monogène.

(ii) $\pi_u = \chi_u$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $E = E_u(x)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et non réduit à $\{0\}$.

On considère $\mathcal{I}_F = \{P \in \mathbb{K}[X];\ P(u)(x) \in F\}$.

Montrer que $\mathcal{I}_F$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire que F est u-monogène.

4. 4-1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\pi_u = PQ$ où P et Q sont deux polynômes unitaires de degré supérieur ou égal à un.

   On note v (respectivement w, v', w') l'endomorphisme de $\ker P(u)$ (respectivement $\ker Q(u)$, $\mathrm{Im}\ P(u)$, $\mathrm{Im}\ Q(u)$) induit par u.

   Montrer que $\ker P(u) \neq \{0\}$ et $\ker Q(u) \neq \{0\}$, puis que $\pi_{w'} = \pi_v = P$ et $\pi_{v'} = \pi_w = Q$.

   Montrer que si, de plus, E est u-monogène, $\dim(\ker P(u)) = \deg(P)$ et $\dim(\ker Q(u)) = \deg(Q)$.

   4-2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est u-monogène.

   Soit F un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u.
   Montrer, en utilisant la question précédente, que $F = \ker \pi_v(u)$.

   En déduire que E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u.

Partie II

Dans cette partie on montre que, **quelque soit l'endomorphisme u de E, E est somme directe de sous-espaces u-monogènes** et plus précisément de sous-espaces stables par u et indécomposables. La première question traite d'un cas particulier et n'est pas nécessaire à la résolution des questions suivantes qui traitent du cas général.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

   1-1 Soit F un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On note $v = u_{/F}$.

   Montrer que F est irréductible si et seulement si F est monogène et π_v est irréductible.

   1-2 Montrer que E est somme directe de sous-espaces stables par u et irréductibles si et seulement si tous les facteurs irréductibles de π_u ont une multiplicité égale à 1.

   (*indication* :pour la réciproque on pourra considérer, pour un polynôme P irréductible, l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}$ de $\ker P(u) \setminus\{0\}$ telles que la somme $\displaystyle\sum_{x \in \mathcal{F}} E_u(x)$ est directe).

2. Dans les questions suivantes u désigne toujours un endomorphisme de E.

   On définit $\tilde{u} : E^* \mapsto E^*$ par $\tilde{u}(f) = f \circ u$.

   Vérifier que $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E^*)$ et que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall f \in E^*$, $P(\tilde{u})(f) = f \circ P(u)$.

   En déduire que u et $\tilde{u}$ ont même polynôme minimal.

3. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, préciser $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*)$ en fonction de $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$.

   Retrouver le résultat de la question précédente.

4. On suppose dans cette question que $\pi_u = P^\alpha$ où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

   4-1 Montrer l'existence de $g \in E^*$ et de $y \in E$ tels que $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g)(y) \neq 0$.

   4-2 Montrer que $\pi_g = \pi_y = P^\alpha$.

   On note alors $F = E_u(y)$ et $\mathcal{H} = \{Q(\tilde{u})(g);\ Q \in \mathbb{K}[X]\} = {E^*}_{\tilde{u}}(g)$.

   4-3 Montrer que $G = \{x \in E;\ \forall f \in \mathcal{H},\ f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de codimension $\deg(\pi_u)$ et que G est stable par u.

4-4 Soit x un vecteur non nul de F.

Montrer que l'on peut écrire x sous la forme $x = P^{\beta}Q(u)(y)$ où Q est un polynôme premier avec P et β un entier tel que $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$.

Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P^{\alpha-1-\beta}R(\tilde{u})(g)(x) \neq 0$.

4-5 En déduire que $E = F \oplus G$, puis que E est somme directe de sous-espaces u-monogènes.

5. Démontrer que, quelquesoit l'endomorphisme u de E, E est somme directe de sous-espaces u-monogènes.

6. 6-1 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On note $v = u_{/F}$.

Montrer que F est indécomposable si et seulement si F est monogène et $\pi_v = P^{\alpha}$ où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

6-2 En déduire que E est somme directe de sous-espaces stables par u et indécomposables.

Partie III - Applications.

A - Application aux endomorphismes nilpotents et idempotents.

1. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.

1-1 Montrer l'existence d'un entier r tel que $1 \leq r \leq n$, $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$.

1-2 Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de E tel que $\big(e_1, u(e_1), \ldots, u^{r-1}(e_1)\big)$ soit une base de $E_u(e_1)$ et tel que $E_u(e_1)$ admette un supplémentaire stable par u.

1-3 En déduire qu'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u s'écrit sous la

forme diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ où p est un entier non nul et les

matrices J_i sont des blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre r_i

avec $r_1 = r$ et $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_p$.

2. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme *idempotent* de E, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = Id_E$.

2-1 On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Que peut-on dire de u ? E est-il u-monogène ?

2-2 On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Montrer que E est somme directe de sous-espaces irréductibles.

Donner, dans une base adaptée, une forme matricielle réduite de u.

B - " Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée ".

1. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E.

   $\tilde{u}$ est défini comme dans **II-2**.

   On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que $E = E_u(x)$.

   1-1 Expliquer - sans déterminer f explicitement - pourquoi il existe un élément f de E^* tel que $E^* = E^*{}_{\tilde{u}}(f)$.

   1-2 On note $\mathcal{B} = \big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big) = \big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\big)$ et $\mathcal{B}^* = \big(e_0^*, e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*\big)$ la base duale.

   Montrer que $\big(e_{n-1}^*, \tilde{u}(e_{n-1}^*), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(e_{n-1}^*)\big)$ est une base de E^*.

   1-3 Montrer que ${}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ sont semblables.

2. Déduire de ce qui précède que, d'une manière générale, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

****

FIN