Exemples d'utilisation du théorème de Courant–Fischer

1ère Partie

A- Étude d'une matrice

1. $M = U\,{}^t\!U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & & u_2u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}$.

   Donc pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on a : $m_{i,j} = u_iu_j$ et $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2$.
2. La j–ème colonne de M est u_jU.
3. On sait que le rang d'une matrice est égal à celui de ses colonnes, or toutes les colonnes de M sont proportionnelles à U, donc leur rang vaut 1, d'où $\mathrm{rg}(M) = 1$.
4. $\mathrm{rg}(M) = 1 \neq n$, donc M n'est pas inversible en particulier 0 est une valeur propre de M, d'autre part $MY = 0 \Leftrightarrow^t YU\,{}^t\!UY = 0 \Leftrightarrow \|{}^t\!UY\| = 0 \Leftrightarrow^t UY = 0$ d'où le sous–espace propre associé est égale à $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\!UY = 0\}$. Sa dimension est $n-1$ car c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & {}^t\!UY \end{array}$.
5. $MU = U\,{}^t\!UU$, donc ${}^t\!UU$ est une autre valeur propre de M avec U est un vecteur propre, et dont la dimension du sous–espace propre associé ne peut pas dépasser 1, puisque déjà celui associé à 0 est de dimension $n-1$, donc sa dimension est 1, engendré par U.
6. La matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale $D = diag({}^t\!UU, 0, \dots, 0)$, car les sous–espaces associée respectivement aux valeurs propres ${}^t\!UU$ et 0 sont $\mathrm{Vect}(U)$ et $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\!UY = 0\}$=$\mathrm{Vect}(U)^\perp$ de dimension 1 et $n-1$

B- Théorème de Courant–Fischer

1. Parceque toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. $R_A(e_k) = \dfrac{<Ae_k, e_k>}{<e_k, e_k>} = \dfrac{<f(e_k), e_k>}{<e_k, e_k>} = \lambda_k$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ car $f(e_k) = \lambda_k e_k$.
3. $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$, donc $f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_ix_ie_i$, d'où $<f(v), v>= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_ix_i^2$ et $<v, v>= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.
4. On a $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, d'où $\lambda_1 <v, v>= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_1x_i^2 \leq <f(v), v>= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_ix_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_nx_i^2 = \lambda_n <v, v>$, donc $\lambda_1 \leq R_A(v) \leq \lambda_n \quad \forall v \neq 0$, d'où $\lambda_1 \leq \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n \leq \max\limits_{v\neq 0} R_A(v)$, d'autre part $R_A(e_1) = \lambda_1$, d'où $\lambda_1 \geq \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$ et $R_A(e_n) = \lambda_n$ d'où $\lambda_n \geq \max\limits_{v\neq 0} R_A(v)$.

   Donc : $\lambda_1 = \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$ et $\lambda_n = \max\limits_{v\neq 0} R_A(v)$.

5. Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$, $w \in V_k \implies w = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i e_i \implies <f(w),w>= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2$ et $<w,w>= \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2$, d'où $R_A(w) = \dfrac{<f(w),w>}{<w,w>} \leq \lambda_k \quad \forall w \in V_k \setminus \{0\}$, d'où $\lambda_k \geq \displaystyle\max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ or $e_k \in V_k \setminus \{0\}$ et $R_A(e_k) = \lambda_k$, d'où $\lambda_k = \displaystyle\max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$.

6. (a) Supposons $\dim\ (F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n) = 0$, alors $\dim\ (F_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n) = k + (n-k+1) = n+1$, impossible puisque $(F_1 \oplus \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n))$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimesnion n, d'où $\dim\ (F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n) \neq 0$ et par suite $\dim\ (F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n) \geq 1$.

   (b) $w \in F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n) \implies w = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} x_i e_i \implies <f(w),w>= \sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2$ et $<w,w>= \displaystyle\sum_{i=k}^{n} x_i^2$, d'où $R_A(w) = \dfrac{<f(w),w>}{<w,w>} \geq \lambda_k$.

   (c) D'aprés 5.) on a : $\lambda_k = \displaystyle\max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v)$ et $V_k \in \mathcal{F}_k$, d'où $\quad \lambda_k \geq \displaystyle\min_{F \in \mathcal{F}_k} \Big(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \Big)$, et d'aprés 6.b) $\lambda_k \leq R_A(w) \leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \quad \forall F \in \mathcal{F}_k$, d'où $\quad \lambda_k \leq \displaystyle\min_{F \in \mathcal{F}_k} \Big(\max_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \Big)$, d'où l'égalité.

7. (a) L'application $\psi_A : v \longmapsto <Av,v>$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en tant que produit scalaire de deux fonctions continues car linéaires $v \mapsto Av$ et $v \mapsto v$ et on en déduit la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ car rapport de deux fonctions continues $v \mapsto <Av,v>$ et $v \mapsto <v,v>$ avec un dénominateur qui ne s'annulle jamais.

   (b) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on cherche à les relier par un chemin qui ne passe pas par l'origine.
   – 1èr cas $0 \notin [A,B]$ alors le chemin $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \\ t & \longmapsto & tA + (1-t)B \end{array}$ fera bien l'affaire.
   – 1èr cas $0 \in [A,B]$, on se fixe un élément $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que : $0 \notin [A,C]$ et $0 \notin [C,B]$, on relie alors A à C puis C à B.
   D'où l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et l'image de l'application R_A est aussi un ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle car les seuls connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses intervalles.

   (c) D'aprés ce qui précède $\{R_A(v),\ v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ \}$ est un intervalle, or $\quad \lambda_1 = \displaystyle\min_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n = \displaystyle\max_{v \neq 0} R_A(v)$. D'où $\{R_A(v),\ v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ \} = [\lambda_1, \lambda_n]$

2ème Partie

1. Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre n.
   supposons B definie positive et soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé, alors ${}^tXBX = \lambda \|X\|^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$
   Inversemnt, supposons B admet deux valeurs propres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, comme B est symetrique alors elle orthogonalement diagonalisable, c'est à dire $\exists P$ inversible telle que $B =^t P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P$, d'où $\forall X \neq 0$ on a : ${}^tXBX =^t X^t P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} PX =^t YY > 0$ où $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{pmatrix} PX \neq 0$ car $X \neq 0$, d'où B est définie positive.
   Conclusion : B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. (a) A est définie positive, donc pour ${}^tX = (1,0) \neq 0$ on a : $a =^t XAX > 0$ d'autre part $\det(A) = ac - b^2 > 0$ car c'est le produit des valeurs propres de A.
   (b) Tout calcul fait : ${}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2})y^2\right) =$ $a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + (\frac{ac-b}{a^2})y^2\right) > 0$. Donc A est définie positive.
3. (a) Montrer que $< g(x), y >=< p \circ f(x), y >=< f(x), p(y) >=< f(x), y >$ car p projecteur orthogonal sur H et $y \in H$ et de même $< x, g(y) >=< x, f(y) >$ or f est symétrique d'où $< f(x), y >=< x, f(y) >$, donc $< g(x), y >=< x, g(y) >$, et alors g est un endomorphisme autoadjoint de H.
   (b) Soit $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ base propre orthonormée de H associée à g dont les valeurs propres sont $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on pose : $V'_k = Vect(e'_1, \ldots, e'_k)$, comme précédement on montre que $\mu_k = \max\limits_{v \in V'_k \setminus \{0\}} R_A(v)$, or $V'_k \in \mathcal{F}_k$ et
   $\lambda_k = \min\limits_{F \in \mathcal{F}_k} \big(\max\limits_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v)\big)$, d'où $\lambda_k \leqslant \mu_k$.
   (c) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
      i. Supposons $\dim(F \cap H) < k$, donc $\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim(F \cap H) = n + k - \dim(F \cap H) > n$, impossible puisque $F \cap H$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n d'où $\dim(F \cap H) \geq k$.
      ii. $g(v) = p(f(v))$, donc $g(v) - f(v) \in H^\perp$, or $v \in H$, d'où $< g(v) - f(v), v >= 0$ et donc $< g(v), v >=< h(v), v >$, en particulier
      $< g(v), v >\leq \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{<f(v),v>}{<v,v>} \quad \forall v \in G \setminus \{0\}$, d'où
      $\max\limits_{v \in G \setminus \{0\}} \dfrac{<g(v), v>}{<v, v>} \leqslant \max\limits_{v \in F \setminus \{0\}} \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>}$.
      iii. En passant au $\min$ dans l'inégalité précèdente et en utilisant le théorème de Courant–Fischer à gauche pour g et à droite pour f et vu que G est de dimension k et F de dimension $k+1$, on conclut que $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$.
4. (a) A_{n-1} n'est autre que la matrice de g, elle est symétrique car g est auto–adjoint.
   (b) Application directe de ce qui précède on a $\lambda_k \leq \mu'_k \leq \lambda_{k+1}$ puisque les μ'_k sont aussi valeurs propres de g.
   (c) Si la matrice A est définie positive, alors toutes ses valeurs propres λ_k sont strictement positives il en sera de même pour les valeurs propres μ'_k de la matrice A_{n-1}, or A_{n-1} est symétrique donc orthogonlement diagonalisable, d'où $\exists P$ inversible telle que $A_{n-1} =^t$
   $P \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & \mu'_n \end{pmatrix} P$, d'où $\forall X \neq 0$ on a :
   ${}^tXA_{n-1}X =^t X^tP \begin{pmatrix} \mu'_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & \mu'_n \end{pmatrix} PX =^t YY > 0$ où
   $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu'_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & \sqrt{\mu'_n} \end{pmatrix} PX \neq 0$ car $X \neq 0$, d'où A_{n-1} est définie positive.
5. (a) Si A est définie positive alors toutes les matrices A_k sont aussi définie positive d'aprés la question précèdente, donc leurs déterminants sont tous strictement positifs.

(b) Le résultat est déja vérifié pour $n = 2$.
Supposons le resultat vrai pour $n-1$, on peut donc déjà affirmer que A_{n-1} est définie positive, d'où $\mu'_k > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n-1$, en particulier $\lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, or $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$, d'où $\lambda_1 > 0$, ainsi A est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, donc définie positive.

6. **Un exemple d'utilisation** :
   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive.
   (b) En déduire que la matrice $\forall X \neq 0 {}^tXM_1X = {}^t X(\int_0^1 M(t)\, dt)X = \int_0^1 {}^tXMX\, dt > 0$ car ${}^tXMX > 0$, d'où M_1 est définie positive.

3ème Partie

A- Une deuxième application

1. (a) $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v)$ d'où
$\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) = \max_{v\in F\setminus\{0\}} (R_A(v) + R_E(v)) \leq \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_E(v) \leq$
$\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \max_{v\neq 0} R_E(v) = \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n$ d'où
$\min_{F\in\mathcal{F}} \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A'}(v) \leq \min_{F\in\mathcal{F}} \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v) + \mu_n$ et donc $\lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$, d'autre part, $\forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \forall v \in F \setminus \{0\}$ on a : $R_{A'}(v) = R_A(v) + R_E(v) \geq R_A(v) + \mu_1$, en passant une première fois au max sur $v \in F \setminus \{0\}$ puis une deuxième fois au min sur $F \in \mathcal{F}$ on obtient l'autre égalité d'où pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\lambda_k + \mu_1 \leq \lambda'_k \leq \lambda_k + \mu_n$.
   (b) D'aprés la question précèdente on a : $\mu_1 \leq \lambda'_k - \lambda_k \leq \mu_n$, d'où $|\lambda'_k - \lambda_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, montrons alors que $\|A - A'\| = \max_{X\neq 0} \dfrac{\|(A-A')X\|}{\|X\|} = \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$, en effet $A - A' = E$ est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormale, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ associée aux valeurs propres $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, d'où $|\mu_k| \leq \max(|\mu_1|, |\mu_n|) = r$, et $\forall X \neq 0$ on a $X = \sum_{k=1}^{n} x_k e'_k$, d'où $X = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k e'_k$ en particulier $\|EX\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 x_k^2 \leq r^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = r^2\|X\|^2$, d'où $\|A - A'\| = \max_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \leq r$, d'autre part $\|A - A'\| = \max_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \dfrac{\|Ee'_1\|}{\|e'_1\|} = |\mu_1|$ et $\|A - A'\| = \max_{X\neq 0} \dfrac{\|EX\|}{\|X\|} \geq \dfrac{\|Ee'_n\|}{\|e'_n\|} = |\mu_n|$, d'où $\|A - A'\| \geq \max(|\mu_1|, |\mu_n|)$ d'où l'égalité.

2. Soit $A \in S_n^+$, on cherche $\varepsilon > 0$ tel que : $\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies A' \in S_n^+$, en effet :
$\|A - A'\| \leq \varepsilon \implies |\lambda'_k - \lambda_k| \leq \varepsilon - \varepsilon \geq \lambda'_k - \lambda_k \implies \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k \implies \min_{1\leq k\leq n} \lambda_k - \varepsilon \geq \lambda'_k$, si on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min_{1\leq k\leq n} \lambda_k > 0$, alors $\lambda'_k \geq \dfrac{1}{2} \min_{1\leq k\leq n} > 0, \quad \forall 1 \leq k \leq n$, ainsi toutes les valeurs propres de A' qui est symétrique sont strictement positives, d'où A' est définie positive.

B- Une dernière application

1. Les matrices R et S sont orthogonales, d'où
${}^tRR = I_n$ et ${}^tSS = I_{n-1}$, d'où ${}^tQQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix}^t RR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tS \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tSS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$, d'où la matrice Q est orthogonale.

2. Simple calcul, en utilisant les relations : ${}^tRMR = \begin{pmatrix} {}^tUU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, {}^tRAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^ta \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix}$ et ${}^tSA_{n-1}S = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

3. On a $A_\varepsilon - A = \varepsilon M$, donc A_ε jouera le rôle de A' et εM celui de E, dont les valeurs propres sont $\mu_1 = 0$ et $\mu_n = \varepsilon^t UU$.
4. (a) C'est un résultat du cours puisque la matrice Q est orthogonale.
   (b) le coefficient d'indice (i,j) de ${}^tQAQ$ s'obtient en faisant le produit scalaire de la i–ème ligne de ${}^tQ$ avec la j–ème colonne de $AQ = AC_j$, donc ce coefficient est ${}^tC_iAC_j = \begin{array}{ll} \alpha & \text{si } i=j=1 \\ \alpha_i & \text{si } i=j\geq 2 \\ \beta_i & \text{si } i=1, j\geq 2 \text{ ou } j=1, i\geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}$

   Soit $X = \sum_{i=1}^{n} y_iC_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_iy_j^tC_iAC_j = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_iy_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\beta_jy_1y_j$.

   (c) De manière analogue on a : ${}^tXA_\varepsilon X = (\alpha + \varepsilon^tUU)y_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_iy_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\beta_jy_1y_j = {}^tXAX + \varepsilon^tUUy_1^2$.

   Ainsi $R_{A_\varepsilon}(X) = \dfrac{{}^tXA_\varepsilon X}{<X,X>} = \dfrac{{}^tXAX + \varepsilon^tUUy_1^2}{<X,X>} = R_A(X) + \varepsilon^tU\,U\dfrac{y_1^2}{<X,X>}$.

   (d) Choisir $X \in F$ tel que : $F \in \mathcal{F}_2$ avec $y_1 = 0$.

FIN DE L'ÉPREUVE