

Dimanche 26 Février 2006.

I. Résultats préliminaires.

A- Un résultat de dérivation.

1) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2, s'écrit :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2) \quad (1)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2) \quad (2)$$

2) En faisant (1)+(2), on obtient :

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + o(1) \longrightarrow f''(x_0), \text{ quand } h \longrightarrow 0^+.$$

3) Si $f'' = 0$, on peut affirmer que f est affine.

A- Un résultat de convergence.

1) a) ?

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx) dx &= \frac{b_n^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nx)) dx \\ &= \frac{b_n^2}{2} \left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n} \right]_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \pi b_n^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_n^2(x) dx \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

- 2) a) $c_n = \min(1, |b_n|)$, d'où $0 \leq c_n \leq 1$, donc (c_n) est bornée. D'autre part $|w_n(x)| \leq |v_n(x)|$, et $(v_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0, donc $(w_n)_{n \geq 1}$ aussi.
- b) Ainsi $(c_n)_{n \geq 1}$ est bornée et $(w_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0, en faisant jouer à c_n le rôle joué par b_n dans la question précédente, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$, donc à partir d'un certain rang $c_n < 1$, pour cela utiliser la définition de la limite pour c_n avec $\varepsilon = 1$, et alors $c_n = |b_n|$ à partir d'un certain rang, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

II. Série trigonométrique dont la somme est continue.

- 1) a) Pour tout réel, x , la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente, donc son terme général $u_n(x)$ converge vers 0.
- b) En particulier $u_n(0) = a_n$ converge vers 0.
- c) $0 \leq |v_n(x)| = |u_n(x) - a_n \cos(nx)| \leq |u_n(x)| + |a_n| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0$, pour tout réel, x . Ainsi (v_n) converge simplement vers 0, et d'après la partie **I.B**, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.
- 2) a) $|u_n(x)| = |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq M$, car $(|a_n| + |b_n|)$ est bornée, puisqu'elle converge vers 0, ainsi $\left| \frac{u_n(x)}{n^2} \right| \leq \frac{M}{n^2}$ et d'autre

part $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n(x)}{n^2}$ converge normalement, dont le terme général est continue donc sa somme est aussi continue.

b) Pour tout réel, x et tout entier, N , on a $\sum_{n=1}^N \frac{u_n(x+2\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{u_n(x)}{n^2}$, quand on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $F(x+2\pi) = F(x)$, donc F est 2π -périodique.

Calculons les coefficients de Fourier de F

$$\begin{aligned} a_n(F) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{u_p(x)}{p^2} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \int_{-\pi}^{\pi} u_p(x) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

On peut permuter signes somme et intégrale vu qu'il y a convergence normale sur $[-\pi, \pi]$.

D'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_p(x) \cos(nx) dx = a_p \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(nx) dx + b_p \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \cos(nx) dx$$

Et on sait que : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+p)x + \cos(n-p)x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p} + \frac{\sin(n-p)x}{n-p} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \text{ si } n \neq p$$

$$\text{Si } n = p, \text{ alors } \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+p)x + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p} + x \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \pi.$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \cos(nx) dx = 0$ car il s'agit d'intégrer sur $[-\pi, \pi]$ une fonction impaire.

Conclusion : $a_n(F) = -\frac{1}{n^2}$. Et pareil pour le calcul de $b_n(F)$.

3) a) On a φ est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , avec $\varphi'(t) =$

$\frac{2 \sin t(t \cos t - \sin t)}{t^3} \sim_0 -\frac{t}{3} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

b) $|\varphi'(t)| = \left| \frac{2 \sin t(t \cos t - \sin t)}{t^3} \right| \leq \frac{2t+1}{t^3} \sim_{+\infty} \frac{2}{t^2}$, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ' aussi.

4) a)
$$\frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2}$$

On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4(nh)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (\cos(nx+2nh) + \cos(nx-2nh) - 2\cos(nx)) \\ &\quad - \frac{1}{4(nh)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (\sin(nx+2nh) + \sin(nx-2nh) - 2\sin(nx)) \end{aligned}$$

Utiliser les formules :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad \sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4(nh)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) (\cos(2nh) - 1)$$

Utiliser la formule : $\cos(2\theta) - 1 = -2 \sin^2(\theta)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(nh)$$

b) Commençons par le 2ème membre de l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (S_n(x) - f(x)) (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h))$$

On peut se permettre de séparer les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x) \varphi(nh) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x) \varphi((n+1)h) - f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h))$$

On remplace $n+1$ par n dans la 2ème somme et on remarque que la 3ème est telescopique, et que $\varphi(0) = 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(nh) = 0$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x) \varphi(nh) - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1}(x) \varphi(nh) - f(x)$$

On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$= S_0(x) \varphi(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (S_n(x) - S_{n-1}(x)) \varphi(nh) - f(x)$$

On remarque que : $S_0(x) = 0, S_n(x) - S_{n-1}(x) = u_n(x)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \varphi(nh) - f(x)$$

On utilise la question précédente et le fait que :

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} - f(x)$$

- c) i. Découle de la définition de la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ pour x , fixé.

ii. On a : $\varphi(nh) - \varphi((n+1)h) = \int_{nh}^{(n+1)h} \varphi'(t) dt$, donc

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=N}^{+\infty} (S_n(x) - f(x)) (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)) \right| \\ & \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |(S_n(x) - f(x))| |(\varphi(nh) - \varphi((n+1)h))| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2A} \sum_{n=N}^{+\infty} \left| \int_{nh}^{(n+1)h} \varphi'(t) dt \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2A} \sum_{n=N}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} |\varphi'(t)| dt \\ & = \frac{\varepsilon}{2A} \int_{Nh}^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2A} \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt = A \end{aligned}$$

iii. D'après la question précédente, on peut conclure que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=N}^{+\infty} (S_n(x) - f(x)) (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)) = 0, \text{ d'autre part } \lim_{h \rightarrow 0^+} \varphi(nh) - \varphi((n+1)h) = 0 \text{ pour tout } 0 \leq n \leq$$

$N-1$, donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{N-1} (S_n(x) - f(x)) (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)) = 0$, puisqu'il s'agit d'une somme finie, et par suite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n(x) - f(x)) (\varphi(nh) - \varphi((n+1)h)) = 0, \text{ donc tenant compte de la question 4.2, on peut conclure que } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} = f(x)$$

- 5) a) Dans cette question il semble y avoir une erreur d'énoncé, il fallait plutôt montrer que $\frac{F}{4} - F_1$ est affine au lieu de $F - F_1$
Posons $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, et utilisons une intégration par

partie dans F_1 où $u'(t) = f(t)$ $u = G(t)$, alors $F_1(x) =$
 $v(t) = x - t$ $v'(t) = -1$
 $[(x - t)G(t)]_{t=0}^{t=x} + G(t) = \int_0^x G(t)dt$ est de classe \mathcal{C}^2 car G est de
classe \mathcal{C}^1 l'est en tant que primitive d'une fonction continue, avec
 $F_1' = G$ et $F_1'' = G' = f$.

b) D'après le préliminaire $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h) + F_1(x-2h) - 2F_1(x)}{h^2} =$
 $F_1''(x) = f(x)$, on pose $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$, alors :
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_2(x+2h) + F_2(x-2h) - 2F_2(x)}{h^2}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2}$
 $- \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h) + F_1(x-2h) - 2F_1(x)}{h^2}$
 $f(x) - f(x) = 0$
, donc $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$ est affine et par suite $F_2'' = 0$, d'où $F'' = 4F_1'' =$
 $4f$.

c) f est 2π -périodique en tant que limite simple de fonctions 2π -
périodique.
Calculons les coefficients de Fourier associés à f .

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cos(pt) + b_p \sin(pt)) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Après avoir justifié la permutation des signes somme et intégrale

$$= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt) \cos(nt) dt + b_p \int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt) \cos(nt) dt \right)$$

Or $\cos(pt) \cos(nt) = \frac{1}{2} (\cos(p+n)t + \cos(p-n)t)$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt) \cos(nt) dt = \begin{cases} \pi & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt) \cos(nt) dt = 0$, comme intégrale sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonc-
tion impaire.
Donc $a_n(f) = a_n$ et de même on montre que $b_n(f) = b_n$.

III. Séries trigonométriques impaires.

A- Une application à l'étude précédente.

1) Pour tout réel, x fixé on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = 0$, en tant que terme général
d'une série numérique convergente, et d'après la partie **I.B** on peut affir-
mer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

2) La suite (b_n) est bornée par un réel M , car convergente, donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| \frac{b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \text{ et } \frac{1}{n^4} \text{ est le terme général d'une série de} \\ &\leq \frac{M}{n^2(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^4} \end{aligned}$$

Riemann convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur \mathbb{R} .

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left| \frac{v'_n(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| \frac{nb_n \cos(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \text{ et } \frac{1}{n^3} \text{ est le terme général d'une série de} \\ &\leq \frac{M}{n(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^3} \end{aligned}$$

Riemann convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{v'_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur \mathbb{R} ,

et enfin

$$\begin{aligned} \left| \frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| -\frac{n^2 b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \text{ et } \frac{1}{n^2} \text{ est le terme général d'une série} \\ &\leq \frac{M}{(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^2} \end{aligned}$$

de Riemann convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur \mathbb{R} . Et ainsi on peut dériver sous le signe somme, d'où ψ est de classe \mathcal{C}^2 , avec : $\psi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1}$.

3) g est bien définie car elle converge normalement d'après la question précédente, d'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2} = -f(x)$ converge simplement et continue, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$ est de classe \mathcal{C}^2 , et aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} = \psi(x)$, avec la possibilité de dériver sous le signe somme, donc g est de classe \mathcal{C}^2 , avec :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin''(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin''(nx)}{n^2(n^2+1)} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1} \\ &\quad -f(x) + g(x) \end{aligned}$$

et donc $-g'' + g = f$.

4) La solution générale est de la forme $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation sans second membre $-y'' + y = 0$, alors $y_H(x) = Ae^x + Be^{-x}$ et y_0 solution particulière avec second membre $-y'' + y = f$, d'après la question précédente g en est une, donc on peut prendre $y_0 = g$, d'où $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + g(x)$, or $y(0) = y(\pi) = 0$ et $y'(0) = y'(\pi) = 0$, d'où $y = g$.

B- Cas où la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ des coefficients est décroissante.

$$\begin{aligned} 1) \quad a) \quad A_n(x) + iB_n(x) &= \sum_{k=1}^n \cos(kx) + i \sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{ikx} \\ &= \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k \end{aligned}$$

Somme d'une suite géométrique de raison e^{ix}

$$= \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix}$$

D'autre part en utilisant la relation $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned} A_n(x) + iB_n(x) &= \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix} \\ &= \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} e^{ix} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + i \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } B_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right),$$

$$A_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{1}{2} + A_n(x) &= \frac{2 \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

b) Il faut ajouter dans la question ceci : $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, dans ce cas $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ nombre réel qui ne dépend pas de n .

$$2) \quad a) \quad \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^n b_k (B_k(x) - B_{k-1}(x))$$

$$= \sum_{k=1}^n b_k B_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k B_{k-1}(x)$$

On remplace $k-1$ par k dans la 2ème somme

$$= \sum_{k=1}^n b_k B_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} B_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) B_k(x) + b_n B_n(x) \quad \text{car } B_0 = 0$$

$$b) \quad \sum_{p=1}^{n-1} |(b_p - b_{p+1}) B_p(x)| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \sum_{p=1}^{n-1} |b_p - b_{p+1}|$$

Et comme la suite $(b_p)_{p \geq 1}$ est décroissante vers 0.

$$= \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \sum_{p=1}^{n-1} b_p - b_{p+1}$$

On se retrouve devant une somme télescopique.

$$= \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} b_0 - b_n$$

$$\leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} b_0$$

D'où la convergence absolue.

$$c) \quad \text{D'après } 2.1 \quad \sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) B_k(x) + b_n B_n(x), \text{ avec}$$

$\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) B_k(x)$ qui converge absolument, $(B_n(x))_{n \geq 1}$ qui est

bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, d'où $\sum_{k=1}^n v_k(x)$ converge simplement dont

la somme est impaire et 2π -périodique, en tant que limite simple de fonctions impaires et 2π -périodiques.

3) Un exemple.

a) D'après la question III.B.1.1 on a :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}, \text{ on intègre cette inégalité entre } x$$

$$\text{et } \pi \text{ et on obtient : } \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt$$

b) Ca découle d'un résultat classique dont l'énoncé est le suivant :

Si φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = 0$

En effet, en posant $u' = \sin(\lambda t) dt$ $u = -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$,

$$v = \varphi(t) \quad v' = \varphi'(t)$$

$$M_0(\varphi) = \sup_{[a,b]} |\varphi(t)| \quad \text{et} \quad M_1(\varphi) = \sup_{[a,b]} |\varphi'(t)| \quad \text{On aura :}$$

$$\left| \int_a^b \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \left[-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \varphi(t) \right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \varphi'(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{2M_0}{\lambda} + \frac{M_1(b-a)}{\lambda} \rightarrow 0$$

quand $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\text{Et donc } S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

$$c) \quad S(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ ainsi } S \text{ est discontinue en } 0, \text{ car } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k0)}{k} = 0.$$

4) Une condition nécessaire de continuité.

$$a) \quad G(-\theta) = \int_0^{-\theta} f(t) dt$$

$$= - \int_0^\theta f(-u) du \quad \text{On pose } u = -t$$

$$= \int_0^\theta f(u) du \quad f \text{ est impaire.}$$

$$= G(\theta)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
G(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)du + G(\theta) && u = t - 2\pi, \\
& && f \text{ } 2\pi - \text{périodique.} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= G(\theta)
\end{aligned}$$

b) Dans cette question il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, comme G est de classe \mathcal{C}^1 , en tant que primitive d'une fonction continue, alors ce développement est $G(\theta) = G(0) + \theta G'(0) + o(\theta)$, or $G(0) = 0$ et $G'(0) = f(0) = 0$ car f impaire. donc $G(\theta) = o(\theta)$.

$$\begin{aligned}
c) \quad a_n(G) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^t f(u)du \right) \cos(nt)dt \\
&\text{On utilise Fubini pour permuter les deux intégrales avec} \\
&\quad -\pi \leq u \leq t \leq \pi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\int_u^{\pi} \cos(nt)dt \right) du \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(nt)du \\
&= -\frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

D'autre part $b_n(G) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \sin(nt)dt = 0$ car $t \mapsto G(t) \sin(nt)$ est impaire puisque G paire.

d) Ainsi la série de Fourier associée à G est $\left(-\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n} \cos(nx) \right)$, elle

converge simplement vers $G(x) - \frac{a_0(G)}{2}$, puisque G est de classe \mathcal{C}^1 , ici il faut faire attention le $a_0(G)$ définie dans l'énoncé n'est pas le coefficient de Fourier pour $n = 0$ car ce dernier est donné par la formule $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t)dt = \frac{a_0(G)}{2}$, puisque G est paire.

Pour $x = 0$ la série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n} \right)$ est convergente dont la somme est $\frac{a_0(G)}{2}$.

$$\begin{aligned}
e) \quad i. \quad \text{On a : } E\left(\frac{k}{2}\right) &= \frac{k}{2} && \text{si } k \text{ pair} \\
&= \frac{k-1}{2} && \text{si } k \text{ impair}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas : $E\left(\frac{k}{2}\right) \geq \frac{k-1}{2}$, si $E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 \leq n \leq k$, alors $\frac{k+1}{2} \leq n \leq k$, donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} \leq \frac{n\pi}{k} \leq \pi$, et alors $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n\pi}{k} \leq \pi$, donc $\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \leq 0$. Et donc $1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \geq 1$, d'où $\frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \geq \frac{b_n}{n}$, or $E\left(\frac{k}{2}\right) + 1 \leq n \leq k$, donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{k}$ et (b_n) est décroissante, donc $b_n \geq b_k$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=E(\frac{k}{2})+1}^k \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) &\geq \sum_{n=E(\frac{k}{2})+1}^k \frac{b_k}{k} \\
&\geq \left(k - E\left(\frac{k}{2}\right)\right) \frac{b_k}{k} \\
&\geq \frac{b_k}{2}
\end{aligned}$$

car $E\left(\frac{k}{2}\right) \leq \frac{k}{2}$, donc $k - E\left(\frac{k}{2}\right) \geq \frac{k}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(G) \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\
&\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^k \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\
&\geq \frac{b_k}{2}
\end{aligned}$$

Et donc $0 \leq \frac{b_k}{2} \leq G\left(\frac{\pi}{k}\right) = o\left(\frac{\pi}{k}\right)$, d'où $0 \leq nb_n \leq 2o(\pi) = o(1)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nb_n = 0$.

Fin du corrigé.