Epreuve 1 : $\mathcal{MP}$

Session 2003

CORRIGÉ

I.ETUDE D'UN EXEMPLE

1. (a) On a : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, donc la fonction est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et par suite intégrable sur l'intervalle $]0,\alpha]$.

   (b) On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est négligeable devant $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ or $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $[x,+\infty[$, donc $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ l'est aussi .

2. Dans la suite , φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

   (a) On a : $\frac{e^{-t}}{t} > 0 \quad \forall t\in[x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt > 0$, d'autre part : $\frac{e^{-t}}{t} < \frac{e^{-t}}{x} \quad \forall t \in]x,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt < \varphi(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{e^{-t}}{x}$, donc on a montré que , pour tout réel strictement positif x on a : $0<\varphi(x)<\frac{e^{-x}}{x}$.

   (b) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt$ est dérivable comme différence d'une constante, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et d'une primitive $\displaystyle\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt$ de $\frac{e^{-x}}{x}$, avec $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

   (c) $\varphi(x)+\ln x = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt + \int_x^{+\infty}\frac{1}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt - \int_x^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ tend vers $C = \varphi(1) - \displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ quand x tend vers 0^+, notez bien qu'on a utilisé les intégrales $\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ qui sont bien définis puisque associés à des fonctions intégrables d'aprés les questions précédentes.

   (d) Une simple utilisation de la relation de Chasles pour intégrales donne pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\ln x = C + \displaystyle\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt.$

   D'autre part : pour tout $t>0, n\in\mathbb{N}^*$ on a : $e^{-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^kt^k}{k!} + R_n(t)$, série alternée, avec $|R_n(t)| \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $\displaystyle\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt = \int_0^x\left(\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}t^{k-1}}{k!} - \frac{R_n(t)}{t}\right)dt = \sum_{k=1}^n\int_0^x\frac{(-1)^{k-1}t^{k-1}}{k!}dt - \int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^k}{k!} - \int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt$, or $\displaystyle|\int_0^x\frac{R_n(t)}{t}dt| \leqslant \int_0^x|\frac{R_n(t)}{t}|dt \leqslant \int_0^x\frac{t^n}{(n+1)!}dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}dt \to 0$ quand $n\to+\infty$ pour $x>0$ fixe, car les puissances sont négligeables devant les factoriels. Donc quand

   $n\to+\infty$ avec $x>0$ fixe, on obtient : $\displaystyle\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}dt = \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^k}{k!}$ et on peut en déduire que

$$\varphi(x)+\ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^k}{k!}.$$

3. (a) Montrons d'abord que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet d'aprés les questions 2.a et 1.b on peut affirmer que φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et d'aprés la question 2.d et vu que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{x^k}{k!}\sim x$ au voisinage de 0, on peut affirmer aussi que $\varphi(x)+\ln x\sim C+x$ au voisinage de 0, or $x\mapsto C+x$ et $x\mapsto \ln x$ sont intégrables sur $]0,1]$, $(\int_x^1|\ln t|dt=1+x\ln x-x)$ donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite $\psi x:\mapsto\varphi(|x|)$ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|e^{ixt}\psi|\leqslant|\varphi(t)|$ et $t\mapsto|\psi|$ intégrable sur les deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, donc $t\mapsto e^{ixt}\psi(t)$ l'est aussi donc les intégrales $I_1=\int_0^{+\infty}e^{ixt}\psi dt$ et $I_2=\int_{-\infty}^0 e^{ixt}\psi(t)dt$ ont un sens et donc $\widehat{\psi}(x)=I_1+I_2$ a un sens. D'autre part : $\widehat{\psi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}\psi(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt+\int_{-\infty}^0\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(-t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixu}\varphi(u)du=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{ixt}\varphi(t)dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-ixt}\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt.$

(c) La fonction $\xi:(x,t)\mapsto\varphi(t)\cos(xt)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par rapport à t pour x fixé, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par rapport x dont la dérivée n-ème est $\frac{\partial^n\xi}{\partial x^n}:t\mapsto t^n\varphi(t)\cos(xt+n\frac{\pi}{2})$, on a $|\frac{\partial^n\xi}{\partial x^n}(x,t)|\leqslant t^n\varphi(t)\quad\forall t\in]0,+\infty[$. Montrons alors que $t\mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, en effet au voisinage de 0 on a : $t^n\varphi(t)+t^n\ln t\sim Ct^n+t^{n+1}$, or $t\mapsto t^nC+t^{n+1}$ et $t\mapsto t^n\ln t$ sont intégrables sur $]0,1]$ donc $t\mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et par suite $\xi:\ t\mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, et donc $t\mapsto\frac{\partial^n\xi}{\partial x^n}(x,t)$ est aussi intégrable sur $]0,1]$.
D'autre part, d'aprés la question 2.a $0<t^n\varphi(t)<t^{n-1}e^{-t}\quad\forall t\in[0,+\infty[$ et comme $t^{n-1}e^{-t}$ est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, car les exponentielles l'emportent devant les puissances, et que $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $t\mapsto t^n\varphi(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et par suite $t\mapsto\frac{\partial^n\xi}{\partial x^n}(x,t)$ l'est aussi.
Conclusion : $t\mapsto\frac{\partial^n\xi}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, le théorème de dérivation sous signe intégrale permet d'affirmer que $\widehat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec :
$\widehat{\psi}^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}t^n\varphi(t)\cos(xt+n\frac{\pi}{2})dt$

(d) Pour tout réel non nul x, on a à l'aide d'une intégration par parties
$\widehat{\psi}(x)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos(xt)dt=\left[\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}\right]_{t\to0}^{t\to+\infty}-\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\frac{\sin xt}{x}dt=$
$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$, car d'aprés 2.a $|\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}|\leqslant\frac{e^{-t}}{x}\to0$, quand $t\to+\infty$ pour x fixé, et d'aprés 2.d $\varphi(t)+\ln t\sim C+t$ au voisinage de 0, donc
$\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}+\frac{\sin xt}{x}\ln t\sim(C+t)\frac{\sin xt}{x}$ quand $t\to0$ pour x fixé, comme $\frac{\sin xt}{x}\sim t$ quand $t\to0$ pour x fixé, alors $\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}+t\ln t\sim(C+t)t$ quand $t\to0$ pour x fixé et donc $\lim_{t\to0}\varphi(t)\frac{\sin xt}{x}=0$, pour x fixé.
Ainsi $\widehat{\psi}(x)=\frac{F(x)}{x}$, avec $\Phi:x\mapsto\int_0^{+\infty}\rho(x,t)dt$ telle que $\Phi(0)=0$ et $\rho(x,t)=\frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$, donc $\widehat{\psi}(0)=\Phi'(0)$ à condition qu'on peut dériver sous signe intégral, ce qui n'est pas difficile à justifier puisque $\frac{\partial\rho}{\partial x}:t\mapsto e^{-t}\cos xt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque majorée par e^{-t}, intégrable sur $[0,+\infty[$, pour x fixé.

Donc $\widehat{\psi}(0) = \Phi'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x}(0,t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$

4. (a) Dans la question précédente on a déjà montré que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt$, pour tout $x > 0$, puis on a : $\Phi'(x) = \Re e \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt} = \Re e \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} = \Re e \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = -\Re e\left(\frac{1}{ix-1}\right) = \frac{1}{x^2+1}$. Notez bien que : $|e^{(ix-1)t}| = e^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

   (b) D'aprés la question précédente, on a : $\widehat{\psi}(x) = \frac{\Phi(x)}{x}$ pour tout réel non nul x, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan x + \lambda$ $\forall x > 0$, de même $\Phi(x) = \arctan x + \mu$ $\forall x < 0$, donc

$$\widehat{\psi}(x) = \begin{array}{ll} \frac{\arctan x+\lambda}{x} & \forall x > 0 \\ \frac{\arctan x+\mu}{x} & \forall x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array}$$

comme $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors $\lambda = \mu = 0$ d'où le résultat.

II.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**

   (a) Pour x fixé, on a : $|e^{-ixt}f(t)| \leqslant |f(t)|$ $\forall t \in \mathbb{R}$, or f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; donc $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ l'est aussi d'où pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt$ est bien définie, en plus $|\widehat{f}(x)| = |\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = M$, constante qui ne dépond pas de x et donc la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

   (b) Si de plus f est continue, alors $t \mapsto e^{-ixt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-ixt}f(t)$ continue sur $\mathbb{R}$, donc $\widehat{f}$ est aussi continue .

2. **Transformations**

   (a) Soient φ_1, φ_2 deux fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi_1+\lambda\varphi_2$ est aussi une fonction complexe continues par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $F(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(t)dt =$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_1(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi_2(t)dt = F(\varphi_1)(x) + \lambda F(\varphi_2)(x)$. et donc F est linéaire .

   (b) f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(at)$ sont aussi des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et par suite possédent des transformés de Fourier, avec que pour tout réel x, $\widehat{f_a}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t-a)dt = e^{-iax}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}f(u)du = e^{-iax}\widehat{f}(x)$, en utilisant le changement de variable $u = t - a$ et de même avec le changement de variable $v = at$ on obtient $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$, faites attention ici aux bornes si $a < 0$ alors $-\infty$ devient $+\infty$ et inversement ce qui justifie le $|a|$.

   (c) La transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ au point x est :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t}f(t)dt = \widehat{f}(x-a).$

(d) Si f est paire alors $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(-u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixu}f(u)du = \int_{0}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt + \int_{0}^{\infty} e^{ixt}f(t)du = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(xt)f(t)dt$, on a utilisé le changement de variable $u=-t$ puis on a remplacé u par t puisque sont deux variables muettes.

Si f est impaire on obtient $\widehat{f}(x) = 2i\int_{0}^{+\infty} \sin(xt)f(t)dt$.

(e) La transformée de Fourier d'une fonction réelle paire est réelle alors que celle d'une fonction réelle impaire est imaginaire.

3. **Dérivation**

(a) f' étant intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(0)$ admet une limite finie quad $x \to +\infty$, et donc $\lim\limits_{+\infty} f$ est finie, soit L cette limite, si $L \neq 0$ alors $|f(x)| \to |L| > \frac{|L|}{2}$, quand $x \to +\infty$, or f est continue, donc un intervalle $[A, +\infty[$ sur lequel $|f| > \frac{|L|}{2}$, or f est intégrable sur $[A, +\infty[$, donc le fonction constante $\frac{|L|}{2}$ le sera aussi, ce qui n'est pas le cas, donc $L = \lim\limits_{+\infty} f = 0$, et de même on montre que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

(b) f' étant une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc admet une transformée de Fourrier, définie par la relation : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\widehat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f'(t)dt = \left[e^{-ixt}f(t)\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(t)dt = ix\widehat{f}(x)$, donc $\widehat{f}(x) = \dfrac{\widehat{f'}(x)}{x}$ tend vers 0 en $\pm\infty$, car $\widehat{f'}$ est bornée en utilisant la question II.1.a pour la fonction f'.

(c) Le fait que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ nous permet d'affirmer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de dériver sous le signe intégral ; avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}tf(t)dt = -i\widehat{g}(x)$.

III.UNE FORMULE D'INVERSION

A-Un autre exemple

1. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$, et $t \mapsto th(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$, (car négligeables devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$), donc $\widehat{h}$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}te^{-t^2}dt = -i\left[-e^{-ixt}\dfrac{e^{-t^2}}{2}\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \dfrac{x}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-t^2}dt = -\dfrac{x}{2}\widehat{h}'(x)$ et donc $\widehat{h}$ satisfait l'équation différentielle : $y' + \frac{x}{2}y = 0$.

2. La solution générale de l'équation différentielle (1) est de la forme $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$, donc $\widehat{h}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ où $\lambda = \widehat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

3. $e^{-\varepsilon t^2} =_{\sqrt{\varepsilon}} h(t)$, donc
d'aprés la question II.2.b la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}, \varepsilon > 0$ est : $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\widehat{h}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$.

B-Application à la formule d'inversion

1. (a) Soit les $v_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définies par $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, se sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ car dominées par v intégrables sur $\mathbb{R}$, et qui de plus convergent simplement vers v. En

utilisant le théorème de la convergence dominée, on a que : $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy.$

(b) Même que précédement, poser $w_n(y) = w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}$ c'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ car bornée par la fonction intégrable $y \mapsto \sup_{\mathbb{R}}|w|e^{-y^2}$, de plus $\lim_{n\to+\infty} w_n(y) = w(x)e^{-y^2}$, donc $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2}dy = w(x)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = w(x)\sqrt{\pi}.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a, et ceci d'aprés la question III.A.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\widehat{h}\left(\frac{t-x}{\sqrt{\varepsilon_n}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon_n}}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon_n}}dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds$, en effectuant le changement de variable $s = \frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}$.

3. (a) C'est le théorème de Fubini qui nous permet d'intervertir les deux intégrales, puisqu'il s'agit d'une fonction continue sur le carré $[-p,p]\times[-q,q]$.

(b) Posons, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)$, on a :

$\lim_{q\to+\infty} f_q(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt$ et $|f_q(y)| \leqslant 2q\sup_{\mathbb{R}}|f|e^{-\varepsilon y^2}$, majorée normalement par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\lim_{q\to+\infty} f_q$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec

$\lim_{q\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_q(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{q\to+\infty} f_q(y)dy$, ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{q\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy.$$

(c) Le même raisonnement que précédement en posant cette fois $g_q(t) = f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)$, et faire tendre p vers $+\infty$ nous permet d'affirmer aussi que pour tout entier naturel non nul q et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt.$$

(d) Conclusion immédiate des question précédents.

4. D'aprés les questions III.B.2. et III.B.3.c, en remplaçant ε par ε_n où $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, on a : $2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)dy.$ Et aprés avoir vérifié qu'on peut intervertir limites et intégrales, chose qui n'est pas difficile puisque $e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\widehat{f}(y)$ sont normalement bornées par $\widehat{f}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}$ sont normalement bornées par $\sup_{\mathbb{R}}|f|e^{-s^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ aussi, donc qund $n \to +\infty$, on obtient : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)dy$, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}$, on a le résultat.

FIN