MP-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

CORRIGÉ

1ère Partie.
Résultats préliminaires.

A-Calcul de la dimensin d'un sous espace vectoriel de E.

1) Conclusion immédiate du théorème de décomposition des noyaux car $(X-\lambda)^p \wedge Q = 1$, puisque $Q(\lambda) \neq 0$ et du fait que $(u-\lambda I_E)^p$ et $Q(u)$ commuttent avec u car sont des polynômes en u, donc leurs noyaux sont stables par u.

2) a) $\forall\, x \in F_\lambda = \ker(u-\lambda I_E)^p$, on a : $(v-\lambda I_E)^p(x) = (u-\lambda I_E)^p(x) = 0_E$, donc $v-\lambda I_E$ est nilpotent, en particulier $\chi_{v-\lambda I_E}(X) = (-1)^d X^d$, où $d = \dim F_\lambda$.

b)
$$\begin{aligned}\chi_v(X) &= \det(v - XI_E)\\ &= \det(v-\lambda I_E - (X-\lambda)I_E)\\ &= \chi_{v-\lambda I_E}(X-\lambda)\\ &= (-1)^d(X-\lambda)^d\end{aligned}$$

On a $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$ avec $F_\lambda, \ker Q(u)$ stables par $u, v = u_{|F_\lambda}$ et $w = u_{|\ker Q(u)}$, donc $\chi_u = \chi_v.\chi_w = (-1)^d(X-\lambda)^d\chi_w$.

c) D'aprés ce qui précède on a : $\chi_u = (-1)^d(X-\lambda)^d\chi_w = (X-\lambda)^p Q$, ainsi $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^d\chi_w$, or $(X-\lambda)^p \wedge \chi_w = 1$, car $\chi_w(\lambda) \neq 0$, d'où $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^d$, donc $p \leq d$, de même et puisque $Q(\lambda) \neq 0$, on a aussi $(X-\lambda)^d$ divise $(X-\lambda)^p$, donc $p \geq d$, d'où l'égalité.

B-Un résultat sur le polynôme minimal.

1) Posons $\mathcal{J}_x = \{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0\}$, on vérifie facilement, tenant compte de la relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, que $\mathcal{J}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ car contient π_u, donc engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u}$ qui vérifie $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, car $\pi_{x,u} \in \mathcal{J}_x$ et qui divise π_u car $\pi_u \in \mathcal{J}_x$ et $\pi_{x,u}$ engendre $\mathcal{J}_x$.

2) $\{\pi_{x,u}$ tel que $x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini car inclu dans
$\{P \in \mathbb{K}[X]$ qui divisent $\pi_u\}$ qui est fini.

3) Posons $\pi = \underset{x\neq 0_E}{\vee} \pi_{x,u}$, ce polynôme a bien un sens car $\{\pi_{x,u}$ tel que $x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini, et il est divisible par tous les polynômes $\pi_{x,u}$, donc $\pi(u)(x) = 0, \forall\, x \in E$, d'où $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ divise π, car π polynôme annulateur de u, donc $\forall\, 1 \leq i \leq r, P_i^{\alpha_i}$ divise π, donc $\exists x \in E$ tel que $x \neq 0_E$, qu'on notera y_i tel que $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, car P_i est irréductible.
Comme $\pi_u(u) = 0 = P_i^{\alpha_i}(u) \circ \prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$, alors

$E =$ Ker $(P_i^{\alpha_1}(u)) \oplus$ Ker $\left(\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)\right)$ donc $y_i = x_i + z_i$, avec

$x_i \in$ Ker $(P_i^{\alpha_i}(u))$, $z_i \in$ Ker $\left(\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)\right)$.

Supposons $x_i = 0_E$, alors $y_i = z_i \in$ Ker $\left(\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)\right)$, donc

$\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}(u)(y_i) = 0_E$, d'où $\pi_{y_i,u}$ divise $\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}$, or $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, donc divise aussi $\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}$, impossible car les $P_j^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux deux à deux puisque les P_i sont irréductibles deux à deux distincts. Donc $x_i \neq 0_E$.
Montrons maintenant que $\pi_{x_i,u} = P_i^{\alpha_i}$, en effet $R = \pi_{x_i,u}$ divise $P_i^{\alpha_i}$ car $x_i \in$ Ker $(P_i^{\alpha_i}(u))$, mais aussi $S = \pi_{x_i,u}$ divise $\prod\limits_{j\neq i} P_j^{\alpha_j}$, pour la même raison, donc $R \wedge S = 1$, en utilisant la question suivante on aura $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u} = RS$ et $P_i^{\alpha_i} \wedge S = 1$, donc $P_i^{\alpha_i}$ divise R, d'où l'égalité.

4) Supposons $x + y = 0$, donc $y = -x$ et par suite $R(u)(y) = -R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise R, absurde.
D'autre part : $(RS)(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x) + S(u) \circ R(u)(y) = 0$, car $R(u)$ et $S(u)$ commuttent, donc $\pi_{x+y,u}$ divise RS
Or $\pi_{x+y}(u)(x + y) = 0$, donc $\pi_{x+y}(u)(y) = -\pi_{x+y}(u)(x)$, d'où $(R\pi_{x+y,u})(u)(y) = R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(y) = -R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(x) = -\pi_{x+y,u}(u) \circ R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise $R\pi_{x+y,u}$, or $S \wedge R = 1$, d'où S divise $\pi_{x+y,u}$, de même R divise $\pi_{x+y,u}$ et comme $S \wedge R = 1$, alors RS divise $\pi_{x+y,u}$, d'où l'égalité.

5) Prendre $e = x_1 + \cdots + x_r$.

2$^{\text{ème}}$ **Partie**

Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\deg \pi_u = n - 1\}$

A-Le cas d'un endomorphisme nilpotent.

1) $x \in$ Ker $\left(v^k\right) \Longrightarrow v^k(x) = 0 \Longrightarrow v^{k+1}(x) = v(0) = 0 \Longrightarrow x \in$ Ker $\left(v^{k+1}\right)$.
Comme on a déjà Ker $\left(v^{k+1}\right) \subset$ Ker $\left(v^{k+2}\right)$, il suffit de montrer l'autre inclusion.
En effet, $x \in$ Ker $\left(v^{k+2}\right)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow v^{k+2}(x) = v^{k+1}(v(x)) = 0 \\ &\Longrightarrow v(x) \in \text{Ker } \left(v^{k+1}\right) = \text{Ker } \left(v^{k}\right) \\ &\Longrightarrow v^k(v(x)) = v^{k+1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \text{Ker } \left(v^{k+1}\right)\end{aligned}$$

2) Utilisons la contraposée de l'implication précédete, donc

$$\begin{aligned} v^{n-1} = 0, v^{n-2} \neq 0 \ &\Longrightarrow E = \text{Ker } (v^{n-1}) \neq \text{Ker } (v^{n-2})\ , \\ &\Longrightarrow \text{Ker } (v^{n-2}) \neq \text{Ker } (v^{n-3}) \\ &\ \ \vdots \\ &\Longrightarrow \{0\} = \text{Ker } (v^0) \neq \text{Ker } (v)\end{aligned}$$

or $\{0\} \subset$ Ker $(v) \subset \cdots \subset$ Ker $(v^{n-1}) = E$, donc les inclusions sont strictes.

3) Montrer $k \leq$ Ker $\left(v^k\right)$, par récurrence sur k en utilisant le fait que dim Ker $\left(v^k\right) <$ dim Ker $\left(v^{k+1}\right)$, donc
dim Ker $\left(v^k\right) + 1 \leq$ dim Ker $\left(v^{k+1}\right)$.
Montrer Ker $\left(v^k\right) \leq k$, par récurrence descendante sur k en utilisant le fait que dim Ker $\left(v^{k-1}\right) <$ dim Ker $\left(v^k\right)$, donc
dim Ker $\left(v^{k-1}\right) \leq$ dim Ker $\left(v^k\right) - 1$.

4) Si Ker $(v^{p+1}) =$ Ker $(v^p) \oplus F$, alors $\dim F = 2$.
De plus $v_{|F} : F \longrightarrow v(F)$ est bijective car Ker $\left(v_{|F}\right) = F \cap$ Ker $(v) \subset F \cap$ Ker $(v^p) = \{0\}$, donc $\dim v(F) = \dim F = 2$

$$\begin{aligned} x \in F \ &\Longrightarrow v^{p+1}(x) = 0 && \text{car } F \subset \text{Ker } (v^{p+1}) \\ &\Longrightarrow v(x) \in \text{Ker } (v^p) && \text{car } v^p(v(x)) = 0\end{aligned}$$

Donc $v(F) \subset \text{Ker}(v^p)$, mais aussi $\text{Ker}(v^{p-1}) \subset \text{Ker}(v^p)$, donc $\text{Ker}(v^{p-1}) + v(F) \subset \text{Ker}(v^p)$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(v^{p-1}) \cap v(F) &\Longrightarrow \exists x' \in F \text{ tel que } x = v(x') \text{ et } v^{p-1}(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \exists x' \in F \text{ tel que } x = v(x') \text{ et } v^p(x') = 0 \\ &\Longrightarrow \exists x' \in F \cap \text{Ker}(v^p) \text{ tel que } x = v(x') \\ &\Longrightarrow x = 0 \\ &\quad \text{car } x = v(x') \text{ tel que } x' \in F \cap \text{Ker}(v^p) = \{0\} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(v^{p-1}) \cap v(F) = \{0\}$, d'où $\text{Ker}(v^{p-1}) \oplus v(F) \subset \text{Ker}(v^p)$, et donc $\dim \text{Ker}(v^p) \geq \dim \text{Ker}(v^{p-1}) + \dim v(F) = \dim \text{Ker}(v^{p-1}) + 2$. Or $\dim \text{Ker}(v^{p-1}) \geq p-1$, d'où $\dim \text{Ker}(v^{p-1}) \leq p-2$, or $\dim \text{Ker}(v^{p-1}) \geq p-1$, absurde.

5) D'aprés la question 3) on a :
$0 \leq \dim\left(\text{Ker}\left(v^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\text{Ker}\left(v^k\right)\right) \leq 2$, d'aprés les questions précédentes on a $\dim\left(\text{Ker}\left(v^{k+1}\right)\right) - \dim\left(\text{Ker}\left(v^k\right)\right) \notin \{0,2\}$, donc $\dim\left(\text{Ker}\left(v^{k+1}\right)\right) = \dim\left(\text{Ker}\left(v^k\right)\right) + 1$, or $\dim(\text{Ker}(v^{n-1})) = n$ car $\text{Ker}(v^{n-1}) = E$, donc par récurrence descendante on montre facilement que $\dim\left(\text{Ker}\left(v^k\right)\right) = k+1$.

6) Supposons $\text{Ker}(v) \subset \text{Im}(v)$, et soit F un supplémentaire de $\text{Ker}(v)$ dans $\text{Im}(v)$, donc $\text{Im}(v) = \text{Ker}(v) \oplus F$, d'où
$\text{Im}(v^2) = v(\text{Im}(v)) = v(F) = \text{Im}(v_{|F})$ et
$\text{Ker}\left(v_{|F}\right) = F \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$, d'aprés la formule du rang appliquée à $v_{|F}$, on conclut que : $\dim F = \dim \text{Im}(v^2) = n - \dim \text{Ker}(v^2) = n-3$ mais aussi, $\dim F = \dim \text{Im}(v) - \dim \text{Ker}(v) = n-2-2 = n-4$, absurde.

7) a) Si on montre que $\{y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y)\}$ est libre, alors $\dim H = n-1$. En effet : Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ tel que $\lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y) = 0$, composons par v^{n-2}, donc $\lambda_0 v^{n-2}(y) = 0$, car $v^{n-1} = 0$ et donc $v^k = 0, \forall k \geq n-1$, or $v^{n-2}(y) \neq 0$, car $y \notin \text{Ker}(v^{n-2})$, donc $\lambda_0 = 0$, en composant aprés par v^{n-3}, on trouve $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

b) Soit $x \in H \cap \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0 = \lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, or $x_0 \in \text{Ker}(v)$, donc x aussi d'où $v(x) = 0$ mais surtout $v^{n-2}(x) = 0$, en reprenant la même démarche que dans la question précédente, on montre que tous les λ_i sont nuls donc $x = 0$, donc $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$, ainsi leur somme est directe, de plus $\dim \mathbb{K}x_0 = 1$, donc $\dim(H \oplus \mathbb{K}x_0) = n$ donc $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$.
Montrons maintenant H et $\mathbb{K}x_0$ sont stables par v.
Soit $x \in H$, donc $x = \lambda_0 y + \ldots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, d'où
$v(x) = \lambda_0 v(y) + \ldots + \lambda_{n-3} v^{n-2}(y) \in H$, car $v^{n-1} = 0$.
Soit $x \in \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0$, d'où $v(x) = 0 \in \mathbb{K}x_0$ car $x_0 \in \text{Ker}(v)$.

c) $\mathcal{B} = \{y, v(y), \ldots, v^{n-2}(y), x\}$ est une base de E car ruénion de deux base de H et $\mathbb{K}x_0$ avec $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$. Dans ce cas

$$J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B- Cas général.

1) a) D'aprés la forme de M, on a :
$u(e_1) = e_2, \ldots, u(e_{n-2}) = e_{n-1}, u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$ et enfin $u(e_n) = \alpha e_n$. Donc $u^2(e_1) = u(e_2) = e_3$ et par récurrence sur $1 \leq k \leq n-2$, on montre que $u^k(e_1) = e_{k+1}$ et enfin $u^{n-1}(e_1) = u\left(u^{n-2}(e_1)\right) = u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$.

b)
$$\begin{aligned} R(u)(e_1) &= u^{n-1}(e_1) - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k u^k(e_1) \\ &= \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{n-2} e_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, on a $e_k = u^{k-1}(e_1)$, donc $R(u)(e_k) = R(u) \circ u^{k-1}(e_1) = u^{k-1} \circ R(u)(e_1) = 0$.
D'autre part $u(e_n) = \alpha e_n$, donc $u^k(e_n) = \alpha^k e_n$ et $R(u)(e_n) = R(\alpha)(e_n) = 0$ car α racine de R.

Ainsi $R(u)$ s'annulle sur une base de E, donc sur E, d'où $R(u)=0$, donc R est un polynôme annulateur de u.

c) Supposons $\deg \pi_u \leq n-2$, donc $\pi_u = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{n-2}X^{n-2}$, avec les λ_k non tous nuls. Or $\pi_u(e_1)=0$ et $u^k(e_1)=e_{k+1}$, donc $\lambda_0 e_1 + \cdots + \lambda_{n-2}e_{n-1} = 0$, avec les λ_k non tous, donc la famille $\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$ est liée, absurde car incluse dans une base. D'aprés la question précédente on a π_u divise R, et $\deg R = n-1$, donc $\deg \pi_u \leq n-1$, or $\deg \pi_u \geq n-1$, donc $\deg \pi_u = \deg R = n-1$, or π_u divise R et sont tous les deux unitaires donc égaux. D'où $u \in \mathcal{C}$.

d) En développant suivant la dérnière ligne, on trouve que

$$\chi_u = (\alpha - X)\chi_{M'} \text{ où } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$$

matrice classique appelée matrice compagnon dont le polynôme caractéristque est exactement $(-1)^{n-1}R$, formule qu'on obtient en développant le déterminant suivant la dernière colonne.
D'où $\chi_u = (-1)^n(X-\alpha)R$.

2) a) π_u qui est unitaire de degré $n-1$ divise χ_u de degré n et de coéfficient dominant $(-1)^n$, donc $\chi_u = (-1)^n(X-\alpha)\pi_u$, or χ_u et π_u ont les mêmes racines qui sont les valeurs propres de u, donc α qui est racine de χ_u est aussi racine de π_u.

b) On a $\chi_u = (X-\alpha)^k Q$ et $Q \wedge (X-\alpha)^k = 1$ car $Q(\alpha) \neq 0$, or $\chi_u(u) = 0$, d'aprés le théorème des noyaux on conclut que : $E = \text{Ker }(\chi_u(u)) = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right) \oplus \text{Ker }(Q(u))$.
De façon pareille puisque, $\pi_u = (X-\alpha)^{k-1}Q$ et $\pi_u(u) = 0$, on a aussi $E = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right) \oplus \text{Ker }(Q(u))$.
En utilisant l'inégalité précèdente on conclut que :
$\dim \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right) = \dim \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$, or $\text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right) \subset \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right)$, d'où l'égalité.
D'autre part, supposons que
$\text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2}\right) = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$, donc
$E = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2}\right) \oplus \text{Ker }(Q(u)) = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2} \circ Q(u)\right)$, d'aprés le théorème des noyaux, ainsi $(X-\alpha)^{k-2}Q$ est un polynôme annulateur de u donc divisible par $\pi_u = (X-\alpha)^{k-1}Q$ ce qui est impossible, donc $\text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2}\right) \neq \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$, or $\text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2}\right) \subset \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$, d'où l'inclusion est stricte.

c) i. $\forall x \in \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right) = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$, on a $(u-\alpha I_E)^{k-1}(x) = 0$, donc $v^k(x) = 0$.
Or $\text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-2}\right) \neq \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^{k-1}\right)$ donc $v^{k-2} \neq 0$.

ii. Raisonner de façon pareille que dans la question II.A.7

d) On a $H_1 \subset \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right)$ donc
$H_1 \cap \text{Ker }(Q(u)) \subset \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right) \cap \text{Ker }(Q(u)) = \{0\}$ car $(X-a)^k \wedge Q = 1$ puisque $Q(\alpha) \neq 0$, donc la somme $H_1 + \text{Ker }(Q(u))$ est directe. Or $E = \text{Ker }\left((u-\alpha I_E)^k\right) \oplus \text{Ker }(Q(u)) = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1 \oplus \text{Ker }(Q(u)) = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, avec $H = H_1 + \text{Ker }(Q(u))$ stable par u en tant que somme de deux sous espace vectoriel stables par u.

e) i. Soit $\mathcal{B}'$ une base de H, alors $\mathcal{B} = \{x_0\} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E avec

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(w) & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

et ceci car $u(x_0) = \alpha x_0, u = w$ sur H qui est stable par u. Donc $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$.
Or $\chi_u = (-1)^n(X-\alpha)^k Q$, donc $\chi_w = (-1)^{n-1}(X-\alpha)^{k-1}Q = (-1)^{n-1}\pi_u$ et $\pi_u(\alpha) = 0$, donc $\chi_w(\alpha) = 0$, or π_w et χ_w ont les mêmes racines, donc $\pi_w(\alpha) = 0$.

ii. D'abord $\pi_w(u) = 0$ sur H, car $w = u$ sur H, d'autre part, comme $u(x_0) = \alpha x_0$, alors $\pi_w(u)(x_0) = \pi_w(\alpha)x_0 = 0$, donc $\pi_w(u) = 0$ sur $\mathbb{K}x_0$, et comme $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, alors $\pi_w(u) = 0$.
Ainsi π_u divise π_w, or $\deg \pi_u = n-1$ car $u \in \mathcal{C}$, d'où $\deg \pi_w \geq n-1$ et comme w est un endomorphisme de H et $\dim H = n-1$, alors $\deg \pi_w \leq n-1$, d'où l'égalité.

f) Soit $e \in H$ tel que $\pi_{e,w} = \pi_w$, et supposons que la famille $\{e, w(e), \ldots, w^{n-2}(e)\}$ est liée, donc ils existent des coéfficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 e + \lambda_1 w(e) + \ldots + \lambda_{n-2}w^{n-2}(e) =$

0, donc $P(u)(e)=0$ avec $P(X)=\lambda_0+\lambda_1X+\ldots+\lambda_{n-2}X^{n-2}$ de degré inférieur à $n-2$, or $\deg\pi_{e,w}=n-1$ ce qui contredit le fait que $\deg\pi_{e,w}$ est un polynôme annulateur pour e de degré minimal. Ainsi $\mathcal{B}=\{e,w(e),\ldots,w^{n-2}(e)\}$ est libre dans H de cardinal $n-1=\dim H$, donc base de H, avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w)=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0&\alpha_0\\1&0&\ldots&0&\alpha_1\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&0&\alpha_{n-3}\\0&\ldots&0&1&\alpha_{n-2}\end{pmatrix}$

En prenant $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\cup\{x_0\}$, on obtient $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de la forme (1).

3) Le sens direct découle de la question précédente, celui inverse découle de la question II.B.1.c

3$^{\text{ème}}$**Partie**

1) a) On sait que le déterminant est une forme n-linéaire donc continue. D'autre part $G(\mathbb{C})=\det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $G(\mathbb{R})=\det^{-1}(]0,+\infty[)$ sont ouverts car $\mathbb{C}^*$ et $]0,+\infty[$ sont ouverts et det continue.

b) Posons $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $AB=(c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, avec $c_{i,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$, d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$c_{i,j}^2\le\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$, donc

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &= \sum_{1\le i,j\le n} c_{i,j}^2\\ &\le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\\ &=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\\ &=\|A\|^2\|B\|^2\end{aligned}$$

c) Montrons d'abors ce résultat, si E est muni d'une norme d'algèbre $\|\|$ et si $x\in E$ tel que $\|x\|<1$, alors $(1-x)$ inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$.

En effet, on sait que $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^n x^k=1-x^{n+1}$ et

$\|x^{n+1}\|<\|x\|^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ car $\|x\|<1$, donc $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=1.$

Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\begin{aligned}\|H\|<\|A^{-1}\|^{-1} &\Longrightarrow \|A^{-1}H\|\le\|A^{-1}\|.\|H\|<1\\ &\Longrightarrow I_n+A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k\end{aligned}$$

Donc $A+H=A(I_n+A^{-1}H)$ est aussi inversible, d'inverse $(I_n+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}=A^{-1}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$,

d'où $(A+H)^{-1}-A^{-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$.

d) Il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{H\to0}(A+H)^{-1}=A^{-1}$.

En effet, dans ce cas on peut supposer $\|H\|<\|A^{-1}\|^{-1}$ et donc $\exists r<0$ tel que $\|A^{-1}H\|<r<1$, donc

$$\begin{aligned}\|(A+H)^{-1}=A^{-1}\| &=\|\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}\|\\ &\le\|A^{-1}H)^kA^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\|A^{-1}H\|^k\\ &\le\|H\|.\|A^{-1}\|^2\sum_{k=0}^{+\infty}r^k\\ &=\frac{\|H\|.\|A^{-1}\|^2}{1-r}\underset{H\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

2) a) Posons $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, donc

$T(x) = \det(xB + (1-x)A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n}(xb_{i,\sigma(i)} + (1-x)a_{i,\sigma(i)})$ est un polynôme en x de degré inférieur à n non nul, car $T(1) = \det B \neq 0$.

b) i. $\lim_{t\to\frac{1}{2}^+}\gamma(t) = \lim_{t\to\frac{1}{2}^-}\gamma(t) = \dfrac{1+2ir}{2} = \gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc γ est continue et par suite ϕ aussi, or $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, donc $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$.

ii. On a $\det\phi(t) = T(\gamma(t))$ et $T(x) = \prod_{i=1}^{p} x - z_i$, donc $\det\phi(t) = \prod_{i=1}^{p}\gamma(t) - z_i$, or $\begin{array}{rll}\mathrm{Im}(\gamma(t)-z_i) & = 2tr - \mathrm{Im}z_i & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ & = 2r(1-t) - \mathrm{Im}z_i & \text{si } 0 \le t \le 1\end{array}$

Supposons $\mathrm{Im}(\gamma(t) - z_i) = 0$.

– 1ér cas : $0 \le t \le \dfrac{1}{2}$, dans ce cas $\mathrm{Im}z_i = 2tr \le r$, absurde.

– 2ème cas : $\dfrac{1}{2} \le t \le 1$, dans ce cas $\mathrm{Im}z_i = 2(1-t)r \le r$, absurde.

Ainsi $t \mapsto \phi(t)$ est un chemin inclu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, joignant A et B, donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Découle du fait que les applications $P \mapsto PJ, P \mapsto P^{-1}$ sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

4) On a : $M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \beta_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\begin{array}{l} \beta = t\alpha \\ \beta_k = t\alpha,\ \forall\, k \ge 1 \\ \beta_0 = \beta^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2}\beta_k\beta^k \\ \beta^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2}\beta_k\beta^k \end{array}$

Ainsi $M(t)$ remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$.
D'autre part les coéfficients de $M(t)$ sont des fonctions polynômailes en t, donc $\psi : t \mapsto M(t)$ est continue, c'est donc un chemin inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, joingnat $J = \psi(0)$ et $M = \psi(1)$.

5) D'aprés la question précedente toute matrice peut étre jointe à J par un chemin continue inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, si on prend deux matrices quelconques M et N dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, on joigne M à J, puis J à N, donc M à N, d'où $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Fin.