Corrigé CNC 2007 MATHS2 MP

A.CHABCHI Professeur en classe MP au lycée Ibn Taimyia - www.mathprepa.africa-web.org

PARTIE I

A - Résultats préliminaires

1. (a) On a selon l'inégalité triangulaire renversée : $\left||P(z)| - \left|a_d z^d\right|\right| \leq \left|P(z) - a_d z^d\right|$, puis selon l'inégalité triangulaire on a

$$\left|P(z) - a_d z^d\right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} \left|a_k z^k\right| =_{+\infty} o\left(\left|a_d z^d\right|\right) \text{ car } \frac{\sum_{k=0}^{d-1} \left|a_k z^k\right|}{\left|a_d z^d\right|} = \sum_{k=0}^{d-1} \left|\frac{a_k}{a_d}\right| |z|^{k-d}$$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. D'où l'équivalence cherchée.

   (b) D'après le (a) , $\dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|}$ admet 1 comme limite quand $|z|$ tend vers $+\infty$, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $R_1 > 0, \forall\ |z| \geq R_1,\ \dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|} \leq 1 + \varepsilon = 2.$

   De même pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $R_2 > 0, \forall\ |z| \geq R_2,\ \dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|} \geq 1 - \varepsilon = \dfrac{1}{2}$. On conclut en choisissant $R = \max(R_1, R_2)$.

2. (a) Puisque $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors tout disque fermé borné est compact, de plus l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est continue, donc elle est bornée sur ce compact et atteint ses bornes, notament sa borne inférieure.

   (b) Selon 1-(a) , il existe $R > 0, \forall\ |z| \geq R, |P(z)| \geq \dfrac{1}{2}|a_d||z^d| \geq \dfrac{1}{2}|a_d|R^d$, donc $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée sur $\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| \geq R\}$, de plus selon 2(a) elle l'est aussi sur $\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| \leq R\}$. Ainsi $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée suc $\mathbb{C}$.
   Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé, On peut choisir le R assez grand :
   $R \geq \left(\dfrac{2|P(z_0)|}{|a_d|}\right)^{\frac{1}{d}}$, de façon que $\dfrac{1}{2}|a_d|R^d \geq |P(z_0)|$, et par suite $\forall\ |z| \geq R, |P(z)| \geq |P(z_0)|$.
   Ainsi $\inf\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{C}\} = \min(\inf\{|P(z)|,\ |z| \leq R\}, |P(z_0)|) = \min(\min\{|P(z)|,\ |z| \leq R\}, |P(z_0)|)$ car $\inf\{|P(z)|,\ |z| \leq R\}$ est atteint selon le 2(a) .
   D'où il existe $z_1 \in \mathbb{C}$, tel que : $\inf\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{C}\} = |P(z_1)|$

B - Première méthode analytique

1. (a) Par l'absurde si $\forall\ t \in]0,1[,\ |\alpha^k Q(\alpha t)| > \dfrac{1}{2}$, alors puisque Q est continue en 0 et $Q(0) = 0$, alors en tendant t vers 0^+, on obtient $0 \geq \dfrac{1}{2}$. Absurde, doù l'exstence d'un tel t_0.

   (b) On a $|Q_1(\alpha t_0)| = \left|1 + b\alpha^k t_0^k + \alpha^k t_0^k Q(\alpha t_0)\right| = \left|1 - t_0^k + \alpha^k t_0^k Q(\alpha t_0)\right| \leq \left(1 - t_0^k\right) + t_0^k \left|\alpha^k Q(\alpha t_0)\right|$ car $\left(1 - t_0^k\right) > 0$, d'où d'après le (a) ,
   $|Q_1(\alpha t_0)| \leq \left(1 - t_0^k\right) + \dfrac{t_0^k}{2} = \left(1 - \dfrac{t_0^k}{2}\right) < 1$ puisque $t_0 \in]0,1[$.

2. **Inégalité d'Argand :**

   Comme indiqué, on note $Q_1(z) = \dfrac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$, puisque $Q_1(0) = 1$ et P non constant, alors $Q_1(X)$ s'écrit $Q_1(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ avec $n \geq 1$.

   Soit $k = \min\{i \in [1,n],\ a_i \neq 0\}$, alors en notant $b = a_k$, on aura $Q_1(X) = 1 + bX^k + X^k Q$ où Q est un polynôme vérifiant $Q(0) = 0$. Nous sommes alors dans les hypothèses de la question (1) , il existe donc $\alpha t_0 \in \mathbb{C},\ |Q_1(\alpha t_0)| < 1$, en posant $\delta = \gamma + \alpha t_0$, on obtient $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. CQFD.

3. **Application :**
Soit P un polynôme non constant et $z_0 \in \mathbb{C}$, $\min\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$. Si $|P(z_0)| \neq 0$, alors la question précédente assure l'existence d'un complexe δ vérifiant $|P(\delta)| < |P(z_0)|$. Absurde car l'application $z \longmapsto |P(z)|$ atteint son minimum absolu en z_0. On conclut que $P(z_0) = 0$.

C - Deuxième méthode analytique

1. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (r,\theta) \longmapsto re^{i\theta} \end{cases}$ est de classe C^1, et puisque P ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$ alors la fonction $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{1}{P(z)} \end{cases}$ est aussi C^1. Enfin f est est classe C^1 comme leur composée.
   - On a : $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = -\dfrac{e^{i\theta}P'\left(re^{i\theta}\right)}{P^2\left(re^{i\theta}\right)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = -\dfrac{rie^{i\theta}P'\left(re^{i\theta}\right)}{P^2\left(re^{i\theta}\right)}$

2. Soit $F(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P\left(re^{i\theta}\right)}$.
   (a) On a déja vu que la fonction f était de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc en particulier f et $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, de plus on intégre sur un segment (pas besoin de domination), donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, r\in\mathbb{R},\ F'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{e^{i\theta}P'\left(re^{i\theta}\right)}{P^2\left(re^{i\theta}\right)}d\theta$.
   (b) On va utiliser le théorème de la convergence dominée généralisé :
   - D'après le préliminaire la fonction $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. Donc il existe $z_0\in\mathbb{C}$, $\min\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)| = m$ avec $m>0$ car P supposé ne s'annulant jamais sur $\mathbb{C}$. On conclut que $\forall\, z\in\mathbb{C},\ \dfrac{1}{|P(z)|} \leq \dfrac{1}{m}$.
   - Soit $(r_n)_n$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. On note $f_n(\theta) = f(r_n,\theta) = \dfrac{1}{P\left(r_n e^{i\theta}\right)}$. alors $(f_n)_n$ est suite de fonction continues sur $[0,2\pi]$ convergent simplement sur cet intervalle vers la fonction nulle (selon le préliminaire) qui est continue.
   - $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in[0,2\pi],\ |f_n(\theta)| \leq \dfrac{1}{m}$ et la fonction constante $\theta \longmapsto \dfrac{1}{m}$ est continue intégrable sur $[0,2\pi]$.

   Ainsi d'après le thérème de la convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} F(r_n) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} f_n(\theta)\,d\theta = 0$.
   Enfin, d'après la caractérisation séquentielle des limites, on aura : $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = 0$.
   (c) On a $F(0) = \dfrac{2\pi}{P(0)}$. Par ailleurs pour $r\neq 0$, on a :
   $F'(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\,d\theta = \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)\,d\theta = \frac{1}{ir}\left(f(r,2\pi) - f(r,0)\right) = 0$. Cette relation reste vrai pour $r=0$ puisque F' est continue en 0 (F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). Le fait que $F'=0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, implique que F est constant sur $\mathbb{R}$, ce qui est contradictoire avec $F(0)\neq 0$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = 0$.

   On conclut alors que P possède au moins une racine complexe.

PARTIE II : Méthode algébrique

A - Premiers résultats :

1. (a) Soit P un polynôme à ceofficients réels de degré impair $(2d+1)$ de coefficient dominant $a\neq 0$, alors $P(x) \sim_{\pm\infty} ax^{2d+1}$,
   ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) \times \lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et par suite P, qui est continue, prend des valeurs positives et d'autres négatives, il s'annule alors sur $\mathbb{R}$ suivant le théorème des valeurs intermédiares.
   (b) Si $u\in\mathcal{L}(E)$, avec dimension impair $2d+1$, alors son polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ sera aussi de degré impair $2d+1$, il admet donc une racine réelle. D'où u possède une valeur propre réelle.

(c) Si une telle matrice existe alors ses valeurs propres réelles seront parmis les racines réelles du polynôme X^2+X+1 annulateur de A. Or ce dernier polynôme n'a pas de racine réelles, d'où $Sp_{\mathbb{R}}(A)=\varnothing$. Ce qui est absurde car $\dim\mathbb{R}^3=3$ impair, ce qui assure l'existence d'une valeur propre réelle.

2. (a) Soit λ un scalaire donné.
   - Puisque $(u-\lambda id_E)$ est un polynôme en u, alors $\ker(u-\lambda id_E)$ et $\operatorname{Im}(u-\lambda id_E)$ sont stables par u.
   - On a u et v commutent, donc aussi $(u-\lambda id_E)$ et v. D'où $\ker(u-\lambda id_E)$ et $\operatorname{Im}(u-\lambda id_E)$ sont stables par v.

   (b) Ecartons le cas où u et v sont des homothéties, dans lequel n'importe quelle droite de E répondera à la question.
   Supposons que u n'est pas une homothétie, puisque n est impair alors u admet au moins une valeur propre réelle λ, d'après le (a) les sous espaces $\ker(u-\lambda id_E)$ et $\operatorname{Im}(u-\lambda id_E)$ sont stables par u et v et sont contenus strictement dans E car $\lambda\in Sp(u)$ et u n'est pas une homothétie : $1\le\dim\ker(u-\lambda id_E)\le(n-1)$. D'autres part selon la formule du rang $n=\dim\ker(u-\lambda id_E)+\dim\operatorname{Im}(u-\lambda id_E)$ est impair, donc forcément $\dim\ker(u-\lambda id_E)$ ou $\dim\operatorname{Im}(u-\lambda id_E)$ est impaire. CQFD

3. Soit $\dim E=2n+1$, montrons le résultat par récurrence sur n.
   - Pour $n=0$, $E=vect(a)$ est une droite vectorielle de dimension impaire, donc u et v admettent chacune une valeur propre associée forcément au vecteur a, qui sera alors vecteur propre commun à u et v.
   - Supposons que chaque couple d'endomorphisme d'un espace de dimension $2d+1$ avec $d\le n$ admet un vecteur propre commun. Soit alors $\dim E=2n+3$ et $(u,v)\in(\mathcal{L}(E))^2$, donc selon 2-$(b)$, E possède un sous espace stable par u et v strict F de dimension $(2k+1)$ avec $k\le n$. D'après l'hypothèse de récurrence les endomorphismes induits u_F et v_F ont un vecteur propre commun, qui sera aussi vecteur propre commun de u et v. CQFD.

B - Endomorphismes d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension impaire

1. On a $\mathcal{F}$ est non vide car contenant la matrice nulle et si $M,N\in\mathcal{F}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors ${}^t(\lambda M+N)=\lambda\overline{M}+\overline{N}=\overline{\lambda M+N}$, donc $\lambda M+N\in\mathcal{F}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considéré comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel et par suite $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

2. Notons $M=(m_{kl})_{1\le k,l\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $m_{kl}=\alpha_{kl}+i\beta_{kl}$ où $\alpha_{kl},\beta_{kl}\in\mathbb{R}$. Si $M\in\mathcal{F}$ alors ${}^tM=\overline{M}$, donc $\forall\ (k,l)\in\{1,2,...,n\}^2$, $m_{lk}=\overline{m}_{kl}$ càd $\alpha_{lk}=\alpha_{kl}$ et $\beta_{lk}=-\beta_{kl}$ en particulier $m_{kk}=\alpha_{kk}$.
   Ainsi $M=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}m_{kl}E_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kk}E_{kk}+\sum_{k<l}\alpha_{kl}(E_{kl}+E_{lk})+i\beta_{kl}(E_{kl}-E_{lk})$, la famille est alors génératrice de $\mathcal{F}$, puis elle est clairement libre. C'est donc une base de $\mathcal{F}$.
   On en déduit que : $\dim\mathcal{F}=n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$. Cette dimension est impaire puisque n est impair.

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) La linéairité de u et v est évidente, puis pour $M\in\mathcal{F}$, on vérifie facilement que ${}^t(u(M))=\overline{u(M)}$ et ${}^t(v(M))=\overline{v(M)}$, donc u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

   (b) On a :
   $$\frac{1}{2}\left[A\left(\frac{1}{2i}\left(AM-M{}^t\overline{A}\right)\right)+\left(\frac{1}{2i}\left(AM-M{}^t\overline{A}\right)\right)\ {}^t\overline{A}\right]=\frac{1}{2i}\left[A\left(\frac{1}{2}\left(AM+M{}^t\overline{A}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(AM+M{}^t\overline{A}\right)\right)\ {}^t\overline{A}\right],$$
   càd $u\circ v(M)=v\circ u(M)$. Donc u et v commutent.
   Puisque $\mathcal{F}$ est $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension impaire et $u,v\in\mathcal{L}(\mathcal{F})$ commutables, alors selon II-A-(3) u et v ont un vecteur propre commun.

   (c) On a $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(AM_0+M_0^t\overline{A}\right)=\lambda M_0 & (1)\\ \dfrac{1}{2i}\left(AM_0-M_0^t\overline{A}\right)=\mu M_0 & (2)\end{cases}$, en faisant $(1)+i\times(2)$, on obtient : $AM_0=(\lambda+i\mu)M_0$.
   Donc $(A-(\lambda+i\mu)I_n)M_0=0\quad(3)$, si $(\lambda+i\mu)$ n'était valeur propre de A, alors $(A-(\lambda+i\mu)I_n)$ serait inversible et par suite la relation (3) donne $M_0=0$ ce qui est absurde puisque M_0 est un vecteur propre, donc non nul.
   conclusion $(\lambda+i\mu)$ est valeur propre complexe de A.

4. (a) Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$ev de dimension impaire, alors Sa matrice A dans une base de E aura une valeur propre complexe suivant le 3-(a). Donc u aura aussi cette même valeur propre complexe.
   (b) On reproduit exactement la même démonstration du cas réel traité à la question II-A-(3).

C - Étude du cas général

C.I. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

1. $\mathcal{G}$ est le sous espace des matrices complexes "antisymétriques", il admet alors $(E_{kl})\, 1 \leq k < l \leq n$ comme base, sa dimension est alors $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
2. (a) La linéairité de u et v est évidente, puis on a facilement $u \circ v(M) = v \circ u(M)$. Donc u et v commutent.
   (b) En écrivant $n = 2^k p$ avec p impair, on aura $\dim \mathcal{G} = \dfrac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1} q$ où $q = p\left(2^k p - 1\right)$ impair, comme produit de entiers impairs. La propriètè $\mathcal{P}_{k-1}$ supposée vraie, permet d'affirmer que u et v ont un vecteur propre commun.
   (c) .
      i. On a $\begin{cases} AN_0 + N_0\ {}^tA = \lambda N_0 & (1) \\ AN_0\ {}^tA = \mu A & (2) \end{cases}$, en remplaçant dans (2), $N_0\ {}^tA$ par $\lambda N_0 - AN_0$, on obtient : $\left(A^2 - \lambda A + \mu I_n\right) N_0 = 0$.
      ii. On a selon (i), $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) N_0 = 0$. Si W désigne la $d^{ième}$ colonne de N_0, alors $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) W$ désigne aussi la $d^{ième}$ colonne de $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) N_0$, il est donc nul.
      iii. Si α n'est pas valeur propre de A et β n'est pas valeur propre de A, alors les matrices $(A - \alpha I_n)$ et $(A - \beta I_n)$ seront invesibles, donc la relation $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) W = 0$ entraîne $W = 0$ qui est absurde. Donc α ou β est valeur propre de A.
      Matriciellement, on a prouvé que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n = 2^k p$ admet une valeur propre complexe, donc vectoriellement, tout endomorphisme f d'un $\mathbb{C} - ev$ de dimension $n = 2^k p$ admet une valeur propre. D'où l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$.

C.II. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

1. D'après le (i) de $\mathcal{P}_k$ prouvé ci-dessus, l'endomorphisme g admet une valeur propre, et donc un vecteur propre associé noté a.
   Si f est une homothétie, alors ce vecteur a est aussi vecteur propre de f. D'où le résultat.
2. (a) Dans ce cas on conclut en appliquant la propriètè $\mathcal{P}_l$, supposée vraie à l'aide de l'hypothèse de récurrence, aux endomorphismes induits par u et v sur cet espace F_1 ou F_2.
   (b) Puisqu f n'est pas une homothétie, alors $F_1 \subsetneq E$ (contenu strictement), donc en passant aux dimensions, on obtient $q < p$.
   On note alors g_1 l'endomorphisme de F_1 induit par g. D'après l'assertion (i) de la propriété $\mathcal{P}_k$ (déjà montré), g_1 aura un vecteur propre $b \in F_1 = \ker(f - \lambda id_E)$. Ce vecteur b sera alors vecteur propre commun à f et g.

D - Retour au théorème de D'Alembert Gauss

1. Il s'agit d'une matrice compagnon dont le détérminant est archi-classique, notons alors $L_1, ..., L_n$ les lignes de la matrice $A - XI_n$, puis faisant l'opération :
   $L_1 \longleftarrow L_1 + XL_2 + ... + X^{n-1} L_n$, on obtient :
   $$\det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & & 0 & -P(X) \\ 1 & -X & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix},$$
   puis développant ce dernier déterminant par rapport sa première ligne, on aura
   $\det(A - XI_n) = (-1)^{n+1}(-P(X)) = (-1)^n P(X)$.

2. D'aprés la partie **C** toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une valeur propre. Or les valeurs propres de A ne sont autres que les racines de P. D'où P admet une racine complexe.

3. Soit Q un polynôme non constant de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant $a \neq 0$, alors Q s'écrit sous la forme $Q(X) = aP(X)$ où P de forme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, qui admettera une racine complexe d'après le (2) ci-dessus.

   Conclusion : Tous polynôme non constant admet au moins une racine complexe.

$* * * * * * \mathcal{FIN} * * * * * *$