Corrigé du Concours national Commun-Session 2008-MP-Maths1.

I.1.a) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$ donc ψ est bijective et

$$\psi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \ z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$$

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2, ψ et ψ^{-1} sont linéaires en dimension finie donc continues.

I.1.b) On a ψ continue et Ω ouvert donc $\psi^{-1}(\Omega) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x + iy \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.1.c) On a ψ^{-1} continue donc $f : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ l'est, de plus $\mathbb{R}^{+*}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc $\Omega = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ et $\mathrm{Re}(z_2) > 0,$ alors

$$\forall t \in [0,1], \ \mathrm{Re}(tz_1 + (1-t)z_2) = t\,\mathrm{Re}(z_1) + (1-t)\,\mathrm{Re}(z_2) > 0$$

donc Ω est convexe par suite il est connexe par arcs.

I.2.a) On a $\forall n < p, \ a_n = 0$ donc pour $|z| < R$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n$

$= z^p g(z)$ avec $g(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} z^n$ donc $g(0) = a_p$.

I.2.b) On a g est la somme d'une série entière de rayon R donc continue sur $D(0,R)$ en particulier g est continue en 0 et comme $g(0) = a_p \neq 0$ alors il existe $r > 0,$ $\forall z \in D(0,r), \ g(z) \neq 0$ donc $\forall z \in D(0,r)\backslash\{0\}, \ f(z) = z^p g(z) \neq 0.$

II.1.a) $\tilde{f}$ admet des dérivées partielles qui sont continues :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = e^{x+iy}, \ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = ie^{x+iy} = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

donc $\tilde{f}$ est de classe C^1, d'où f vérifie (H).

II.1.b) On a $\forall (x,y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 > 0,$ donc $\tilde{f}$ est de classe C^1sur $\mathcal{U}$

et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

Les dérivées partielles de $\tilde{f}$ sont continues donc $\tilde{f}$ est de classe C^1 et f vérifie (H).

Notons $\theta = \arcsin(\frac{y}{|z|}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $y = |z|\sin\theta$ et $\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{|z|^2}} = \frac{x}{|z|}$.

Ainsi $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ et $e^{f(z)} = e^{\ln(|z|)+i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$.

II.1.c) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ est définie sur $\mathbb{C}$,

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{k=1}^{d} k a_k (x + iy)^{k-1} = P'(z)$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = \sum_{k=1}^{d} ik a_k (x + iy)^{k-1} = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$.

les dérivées partielles de $\tilde{f}$ sont continues donc $\tilde{f}$ est de classe C^1 et vérifie (H).

II.1.d) On a $\tilde{f}(x,y) = x - iy$ donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = -i \neq i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$, donc

f ne vérifie pas (H).

II.2.a) Soit $x = \mathrm{Re}(z)$. On a la fonction $f : t \to e^{-zt^2+ivt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$|f(t)| = e^{-xt^2}$, donc si $x > 0$ alors $f(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ par suite f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si $x \leq 0$ on a $|f(t)| \geq 1$ et $t \to 1$ est non intégrable sur $\mathbb{R}$ donc f aussi.

Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

II.2.b) Soit $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ et $h : (y,t) \to e^{-(x+iy)t^2+ivt}$.

On a h et $\frac{\partial h}{\partial y} : (y,t) \to -it^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Dominations :

Soit $y \in \mathbb{R}$ on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|h(y,t)| = e^{-xt^2}$ et $\left|\frac{\partial h}{\partial y}(y,t)\right| = t^2 e^{-xt^2}$

Notons $\varphi(t) = e^{-xt^2}$ et $\psi(t) = t^2 e^{-xt^2}$. On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$\varphi(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$, car $x > 0$, donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, de même pour ψ donc

par théorème de dérivation on déduit que $y \to \tilde{f}_v(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = -i\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$$

II.2.c) Soit $g : (x,t) \to e^{-(x+iy)t^2+ivt}$.

On a g et $\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \to -t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ sont continues sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Dominations locales : Soit $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$|g(x,t)| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = t^2 e^{-xt^2} \leq t^2 e^{-at^2}$

Notons $\varphi(t) = e^{-at^2}$ et $\psi(t) = t^2 e^{-at^2}$, on a φ et ψ sont intégrables sur $\mathbb{R}$,

par théorème de dérivation on déduit que $x \to \tilde{f}_v(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y) = -\int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt} dt$$

donc d'aprés b) $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y)$ ou encore $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y}(x,y)$.

II.2.d) Soit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. On a l'application $k : (x,y,t) \to -t^2 e^{-(x+iy)t^2+ivt}$ est continue sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$. Domination locale de k :

On a pour $(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \subset \mathcal{U}$, $|k(x,y,t)| = t^2 e^{-xt^2} \leq \varphi(t) := t^2 e^{-at^2}$

et $a > 0$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par théorème de continuité on a $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}$ est

continue sur $\mathcal{U}$, par suite $\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial y} = i\frac{\partial \tilde{f}_v}{\partial x}$ l'est aussi d'où $\tilde{f}_v$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et

f_v vérifie (H).

II.3.a) Soit $I = \{x \in \mathbb{R}, |x+iy_0| < R\} = \begin{cases} \left]-\sqrt{R^2-y_0^2}, \sqrt{R^2-y_0^2}\right[\text{ si } R \in \mathbb{R}^{+*} \\ \mathbb{R} \text{ si } R = +\infty \end{cases}$

On a la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge si $|z| < R$, donc l'application

$x \to f(x+iy_0)$ est bien définie sur I. Notons $u_n(x) = f_n(x+iy_0) = a_n(x+iy_0)^n$.

On a u_n est de classe C^1 sur I, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I.

On a I symétrique par rapport à l'origine, montrons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge

uniformément sur tout segment $[-r,r] \subset I$. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in [-r,r],\ |u_n'(x)| &= n|a_n||x+iy_0|^{n-1} = n|a_n|(x^2+y_0^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\leq n|a_n|(r^2+y_0^2)^{\frac{n-1}{2}} = n|a_n||r+iy_0|^{n-1}\end{aligned}$$

or la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence et comme $r \in I$ alors $|r+iy_0| < R$ et par suite la série $\sum_{n\geq 1} na_n(r+iy_0)^{n-1}$ est

absolument convergente d'où la série $\sum u_n'$ converge normalement donc

uniformément sur $[-r,r]$, donc par théorème de dérivation on a l'application

$x \to f(x+iy_0)$ est de classe C^1 sur I et a pour dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy_0)^{n-1}$.

II.3.b) Soit $(x,y) \in \mathcal{U}$ c'est à dire $x^2+y^2 < R^2$. D'aprés a) on a ,

$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$. D'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n a_n(y-ix)^n$, donc

$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{g}(y,-x) \text{ où } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n a_n z^n$$

g est la somme d'une série entière de même rayon R , donc d'aprés a)

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(y,-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ni^n a_n(y-ix)^{n-1} = i\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)$$

II.3.c) La série entière $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ est de rayon R donc sa somme S est continue sur

$D(0,R)$. D'aprés 3.b) on a pour $(x,y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = S(x+iy) = S\circ\psi(x,y),$$

il en résulte que $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ est continue sur $\mathcal{U}$, par suite $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y} = i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ l'est aussi

donc $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et vérifie (H).

II.4.a) On a $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc $\widetilde{\lambda f+g} = \lambda\tilde{f}+\tilde{g}$ l'est aussi de plus

$$\frac{\partial\widetilde{\lambda f+g}}{\partial y} = \lambda\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{g}}{\partial y} = \lambda i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x} + i\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x} = i\frac{\partial\widetilde{\lambda f+g}}{\partial x}$$

par suite $\lambda f+g$ vérifie (H).

II.4.b) On a $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc $\widetilde{fg} = \tilde{f}\,\tilde{g}$ l'est aussi de plus

$$\frac{\partial\widetilde{fg}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\tilde{g} + \tilde{f}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y} = i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}\tilde{g} + i\tilde{f}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x} = i\frac{\partial\widetilde{fg}}{\partial x}$$

par suite fg vérifie (H).

II.4.c) On a $f(\Omega) \subset \Omega'$ donc $F \circ f$ est bien définie sur Ω.

Posons pour $(x,y) \in \mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$, $f_1(x,y) = \mathrm{Re}(\tilde{f}(x,y))$ et $f_2(x,y) = \mathrm{Im}(\tilde{f}(x,y))$.

On a $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc f_1 et f_2 le sont. On a:

$$\widetilde{F \circ f}(x,y) = F \circ f(x+iy) = F(f_1(x,y) + if_2(x,y)) = \tilde{F}(f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

donc $\widetilde{F \circ f}$ est composé d'applications de classe C^1, elle est donc de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{F \circ f}}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(f_1,f_2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) + i\frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2)
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{F \circ f}}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(f_1,f_2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) + i\frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2) = i\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(f_1,f_2)
\end{aligned}$$

par suite $F \circ f$ vérifie (H).

II.4.d) Notons $g = \dfrac{1}{f}$, on a $\tilde{f}$ ne s'annule pas et de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ donc $\tilde{g} = \dfrac{1}{\tilde{f}}$ l'est aussi, de plus

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\frac{1}{\tilde{f}^2} = -i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\frac{1}{\tilde{f}^2} = i\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$$

donc g vérifie (H).

II.4.e.i) On a pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
d\tilde{f}(x_0,y_0)(h) &= h_1\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0) = h_1(a+ib) + h_2 i(a+ib) \\
&= h_1(a+ib) + h_2(-b+ia)
\end{aligned}$$

donc $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

II.4.e.ii) Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a + ib = re^{i\theta}$, donc $A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

donc l'endomorphisme L de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A est la similitude directe

de rapport r et d'angle θ. L est une rotation si $r = 1$ c'est à dire $a^2 + b^2 = 1$.

II.4.f) On a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ donc d'aprés Schwarz $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} = i\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} = i^2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$

par suite $\Delta\tilde{f} = 0$.

III.1) On a Ω est un ouvert donc voisinage de chacun de ses points et comme $z_0 \in \Omega$

alors $\exists \rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$.

III.2) $\bullet \varphi$ est bien définie :

Si $R = +\infty$ alors $\Omega = \mathbb{C}$ et $\varphi(r,\theta) = f(z_0 + re^{i\theta})$ est bien définie.

Si R est fini alors $D(z_0, R) \subset \Omega$ en effet :

Si $z \in D(z_0, R)$ alors $|z - z_0| < R$ et d'aprés la caractérisation de la borne supérieure

il existe $\rho > |z - z_0|$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ donc $z \in D(z_0, \rho) \subset \Omega$.

Ainsi pour $(r,\theta) \in]0, R[\times\mathbb{R}$ on a $z_0 + re^{i\theta} \in D(z_0, R) \subset \Omega$ donc $\varphi(r,\theta)$ est bien définie.

$\bullet$ On a $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U} = \psi^{-1}(\ D(z_0, R))$ et l'application

$$(r,\theta) \to (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta),\ \text{où } (r,\theta) \in]0, R[\times\mathbb{R}$$

est de classe C^1 donc φ est composé d'applications de classe C^1 par suite l'est aussi.

$\bullet$ Notons $M = (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(M) + \sin\theta\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(M) = e^{i\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(M)$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(M) + r\cos\theta\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(M) = (-r\sin\theta + ir\cos\theta)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(M)$$

$$= ire^{i\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(M) = ir\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)$$

III.3.a) Les applications $\theta \to \cos\theta$ et $\theta \to \sin\theta$ sont 2π périodiques donc φ_r l'est aussi.

Comme d'aprés 2) φ est de classe C^1 alors φ_r l'est aussi et on a :

$$\varphi_r'(\theta) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = ire^{i\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$$

III.3.b) On a φ_r est 2π périodique de classe C^1, en particulier elle est continue et C^1 par morçeaux donc d'aprés un théorème du cours la famille $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et la série de Fourier de φ_r converge normalement vers φ_r sur $\mathbb{R}$.

III.4.a) On a $c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\varphi_r(\theta)d\theta$.

III.4.b) Les applications $g : (r,\theta) \to e^{-in\theta}\varphi(r,\theta)$, $\frac{\partial g}{\partial r} : (r,\theta) \to e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)$ sont continues sur $]0,R[\times[0,2\pi]$, donc par théorème de dérivation on a c_n est de classe C^1 sur $]0,R[$ et pour tout $r\in]0,R[$:

$$\begin{aligned} c_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{1}{ir}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta)d\theta \quad \text{(d'aprés 2)} \\ &= \frac{1}{2\pi ir}([e^{-in\theta}\varphi_r(\theta)]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\varphi_r(\theta)d\theta) \\ &= \frac{n}{2\pi r}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\varphi_r(\theta)d\theta \quad (\text{car } \varphi_r(0) = \varphi_r(2\pi)) \\ &= \frac{n}{r}c_n(r) \end{aligned}$$

III.4.c) On a $\forall r\in]0,R[$:

$$\begin{aligned} h_n'(r) &= \frac{c_n'(r)}{r^n} - n\frac{c_n(r)}{r^{n+1}} = \frac{n}{r^{n+1}}c_n(r) - n\frac{c_n(r)}{r^{n+1}} \quad \text{(d'aprés 4.b)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc h_n est constante sur $]0,R[$.

III.4.d) On a pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $r\in]0,R[$,

$$c_{-n}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\varphi_r(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

donc

$$|c_{-n}(r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta$$

On a $\tilde{f}$ est de classe C^1 donc continue par suite $f = \tilde{f}\circ\psi^{-1}$ est continue sur Ω, donc l'application $(r,\theta) \to e^{in\theta}f(z_0 + re^{i\theta})$ est continue sur $[0,R[\times[0,2\pi]$ donc par théorème de continuité on a l'application $c_{-n} : r \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$ est continue sur $[0,R[$ donc bornée au voisinage de zéro à droite, donc $h_{-n}(r) = r^n c_{-n}(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0^+, or d'aprés c) h_{-n} est constante donc elle est nulle sur $]0,R[$.

Finalement $\forall r \in]0,R[, c_{-n}(r) = r^{-n}h_{-n}(r) = 0.$

III.5) On a pour $n \geq 0$ et $\forall r \in]0,R[,\ c_n(r) = r^n h_n(r) = a_n r^n,$ donc d'aprés 3.b) la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument par suite la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon supérieur ou égal à R. D'autre part, d'aprés 3.b) et 4.d) on a

$$\forall (r,\theta) \in]0,R[\times[0,2\pi],\ f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r)e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

d'où

$$\forall z \in D(z_0,R)\backslash\{z_0\},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Pour finir il suffit de montrer que $f(z_0) = a_0$:

On a f continue sur Ω donc l'application $(r,\theta) \to f(z_0 + re^{i\theta})$ est continue sur $[0,R[\times[0,2\pi]$ donc par théorème de continuité on a l'application

$$r \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

est continue sur $[0,R[$, par suite $\lim\limits_{r\to 0^+} c_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta = f(z_0)$

or $\forall r \in]0,R[\ a_0 = h_0(r) = c_0(r)$ donc $a_0 = f(z_0)$.

III.6) Pour $x \in]-R,R[$ on a d'aprés 5), $f(x + z_0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$ donc d'aprés l'unicité du développement en série entière de $g : x \to f(x + z_0),$ la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est unique et $a_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

III.7) On a d'aprés 3.a) pour $r \in]0,R[,\ \varphi_r$ est continue 2π périodique donc d'aprés Parseval on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^2 d\theta = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(r)|^2,$

or si $n < 0,\ c_n(r) = 0$ et si $n \geq 0,\ c_n(r) = r^n h(n) = a_n r^n$ donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|^2d\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Partie 4:

A.1) Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, il existe $M>0,\ \forall z\in\mathbb{C}, |f(z)|\le M,$ donc d'aprés

Gutzmer

$$\forall r>0,\ \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|^2r^{2k}\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M^2d\theta\le M^2$$

donc pour $n\ge1,\ |a_n|^2\le\frac{M^2}{r^{2n}}$ et en faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient $a_n=0,$

par suite d'aprés 5) de la partie 3, on obtient $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=a_0,$

d'où f est constante.

A.2.a) On a pour z non nul

$$|P(z)|=|a_d||z|^d\left|1+\sum_{n=0}^{d-1}\frac{a_n}{a_dz^{n-d}}\right|$$

or $\left|\sum_{n=0}^{d-1}\frac{a_n}{a_dz^{n-d}}\right|\le\sum_{n=0}^{d-1}\frac{|a_n|}{|a_d||z|^{n-d}}\underset{|z|\to+\infty}{\to}0$ donc $\lim_{|z|\to+\infty}\left|1+\sum_{n=0}^{d-1}\frac{a_n}{a_dz^{n-d}}\right|=1,$

d'où $|P(z)|\underset{|z|\to+\infty}{\sim}|a_d||z|^d,$ il en résulte que $\lim_{|z|\to+\infty}g(z)=0,$ donc il existe $A>0,$

tel que pour $|z|>A,\ |g(z)|\le1,$ d'autre part P est continue et ne s'annule pas donc

g est continue donc elle est bornée sur le compact $\overline{D(0,A)},$ ainsi g est bornée sur $\mathbb{C}$.

A.2.b) D'aprés 1.c) et 4.d) de la partie 2 on a g vérifie (H) et comme elle est bornée

alors d'aprés Liouville elle est constante donc P est constant ce qui est absurde

d'où P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

B.1) On a z_0 et z_1 sont dans Ω qui est connexe par arcs donc il existe $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$

continue et à valeurs dans Ω telle que $\gamma(0)=z_0$ et $\gamma(1)=z_1$.

B.2) • On a $f(\gamma(0))=f(z_0)=0$ donc $0\in I,$ donc I est une partie non vide de $\mathbb{R}$

de plus I est majoré par 1 donc I admet une borne supérieure σ.

• On a γ est continue à droite en 0, donc il existe $a\in]0,1],\forall t\in[0,a],$

$|\gamma(t) - \gamma(0)| < \rho,$ donc pour $t \in [0,a],\ \gamma(t) \in D(z_0,\rho)$ d'où $f(\gamma(t)) = 0.$

Il en résulte que $[0,a] \subset I$ donc $\sigma > 0.$

• On a $\forall t \in I,\ [0,t] \subset I$ donc I est un intervalle d'origine 0 et comme $\sigma = \sup I$ alors $[0,\sigma[\subset I$ donc $\forall s \in [0,\sigma[,\ f(\gamma(s)) = 0$ or $f \circ \gamma$ est continue en σ donc quand s tend vers σ on obtient $f(\gamma(\sigma)) = 0,$ ainsi $\forall s \in [0,\sigma],\ f(\gamma(s)) = 0$ d'où $\sigma \in I.$

B.3) Dans la question précédente on a justifié que $[0,\sigma[\subset I$ et $\sigma \in I$ donc $[0,\sigma] \subset I$ or $f(\gamma(1)) = f(z_1) \neq 0$ donc $1 \notin I$ d'où $\sigma < 1.$

• Construction de $(t_k)_{k\geq 1}$:

Soit $t \in]\sigma,1[$ donc $t \notin I,$ donc il existe $s \in [0,t]$ tel que $f(\gamma(s)) \neq 0,$ or $[0,\sigma] \subset I,$ donc $s \in]\sigma,t],$ ainsi

$$\forall t \in]\sigma,1[,\ \exists s \in]\sigma,t] \text{ tel que } f(\gamma(s)) \neq 0$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma_n = (1 - \frac{1}{2n})\sigma + \frac{1}{2n} \in]\sigma,1[$.

On a $\sigma_1 \in]\sigma,1[$ donc $\exists t_1 \in]\sigma,\sigma_1]$ tel que $f(\gamma(t_1)) \neq 0.$

$\min(t_1,\sigma_2) \in]\sigma,1[$ donc $\exists t_2 \in]\sigma,\min(t_1,\sigma_2)]$ tel que $f(\gamma(t_2)) \neq 0.$

supposons construit $(t_i)_{1\leq i\leq k}$ tel que $t_i \in]\sigma,\sigma_i],\ f(\gamma(t_i)) \neq 0$ et $t_1 \geq t_2 \geq .. \geq t_k.$

Construction de t_{k+1} :

On a $\min(t_k,\sigma_{k+1}) \in]\sigma,1[$ donc $\exists t_{k+1} \in]\sigma,\min(t_k,\sigma_{k+1})]$ tel que $f(\gamma(t_{k+1})) \neq 0.$

Ainsi on a construit par récurrence une suite décroissante $(t_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $]\sigma,1[$ tel que $f(\gamma(t_k)) \neq 0$ de plus $\sigma \leq t_k \leq \sigma_k$ et $\sigma_k \underset{k\to+\infty}{\to} \sigma$ donc $t_k \underset{k\to+\infty}{\to} \sigma.$

• $\gamma(\sigma) \neq z_0$:

Supposons que $\gamma(\sigma) = z_0$ alors par continuité de γ en σ on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma(t_k) = z_0,$

donc il existe $k \geq 1$ tel que $\gamma(t_k) \in D(z_0,\rho)$ donc $f(\gamma(t_k)) = 0$ ce qui est absurde, donc $\gamma(\sigma) \neq z_0.$

B.4.a) On a f vérifie (H) et $\gamma(\sigma) \in \Omega$ donc d'aprés 5) partie 3, il existe $r_1 > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon $\geq r_1$ tels que $D(\gamma(\sigma), r_1) \subset \Omega$ et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \gamma(\sigma))^n,\ z \in D(\gamma(\sigma), r_1).$$

B.4.b) Supposons que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est nulle, donc d'aprés a), $\forall z \in D(\gamma(\sigma), r_1)$, $f(z) = 0,$ or d'aprés 3), $\gamma(t_k)$ tend vers $\gamma(\sigma)$ donc il existe $k \geq 1$ tel que $\gamma(t_k) \in D(\gamma(\sigma), r_1),$ donc $f(\gamma(t_k)) = 0$ ce qui contredit 3),

donc $(a_n)_{n\geq 0}$ est non nulle, donc d'aprés 2.b) de la partie 1) il existe $r \in]0, r_1[$, tel que pour $0 < |z| < r,$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \neq 0,$ donc pour $0 < |z - \gamma(\sigma)| < r,$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - \gamma(\sigma))^n \neq 0.$

B.5) On a l'ensemble $J := \{t \in [0,\sigma];\ \gamma(t) = \gamma(\sigma)\}$ contient σ donc il est non vide de plus il est minoré par 0 donc admet une borne inférieure $\beta.$ D'autre part, on a d'aprés 3) $z_0 \neq \gamma(\sigma)$ c'est à dire $\gamma(0) \neq \gamma(\sigma)$ et comme γ est continue en 0, alors il existe $\varepsilon \in]0,\sigma]$ tel que $\forall t \in [0,\varepsilon],\ \gamma(t) \neq \gamma(\sigma)$ donc $\beta \geq \varepsilon$ en particulier $\beta > 0.$ On a γ est continue donc J est fermé d'où $\beta = \inf J \in \bar{J} = J$ donc $\gamma(\beta) = \gamma(\sigma)$ donc par continuité de γ en $\beta,$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[,\ \gamma(t) \in D(\gamma(\beta), r)$ c'est à dire $\gamma(t) \in D(\gamma(\sigma), r)$ et comme $t \in [0,\sigma]$ alors $f(\gamma(t)) = 0$ d'où d'aprés 4.b), $\gamma(t) = \gamma(\sigma)$ ce qui contredit la définition de β d'où f est nulle.

C.1.a) On a $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ donc d'aprés 5) partie 3, il existe $(a_n)_{n\geq 0}$,

$$\forall z \in D(z_0, \rho),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et d'aprés Gutzmer, $\forall r \in]0, \rho[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 d\theta \quad (\text{car } z_0+re^{i\theta} \in D(z_0,\rho)) \\ &\leq |f(z_0)|^2 = |a_0|^2\end{aligned}$$

par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0,$ d'où $\forall n \geq 1,\ a_n = 0,$ donc

$$\forall z \in D(z_0,\rho),\ f(z) = a_0 = f(z_0).$$

C.1.b) On a f vérifie (H) et toute application constante vérifie (H) donc d'aprés 4.a) partie 2, l'application $g : z \to f(z) - f(z_0)$ vérifie (H) et d'aprés a) $\forall z \in D(z_0,\rho)$, $g(z) = 0,$ et on a Ω connexe par arcs, donc d'aprés B, $g = 0$ sur Ω par suite f est constante sur Ω.

C.2.a.i) On a $g : (v,t) \to e^{-ut^2+ivt}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} : (v,t) \to ite^{-ut^2+ivt}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Dominations : $\forall (v,t) \in \mathbb{R}^2,\ |g(v,t)| = e^{-ut^2}$ et $\left|\frac{\partial g(v,t)}{\partial v}\right| = |t|e^{-ut^2}.$

Soit $h_1(t) = e^{-ut^2}$ et $h_2(t) = |t|e^{-ut^2},$ on a h_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et

$h_1(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}),$ car $u > 0,$ donc h_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$ de même pour h_2 donc

par théorème de dérivation on a μ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\mu'(v) &= \int_{\mathbb{R}} ite^{-ut^2+ivt}dt = \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{i}{2u}e^{-ut^2}e^{ivt}\right]_{-A}^{A} - \frac{v}{2u}\int_{-A}^{A} e^{-ut^2+ivt}dt\right) \\ &= -\frac{v}{2u}\mu(v) \quad (\text{car } \left|e^{-ut^2}e^{ivt}\right| = e^{-ut^2} \underset{|t|\to+\infty}{\to} 0)\end{aligned}$$

ii) On a $\mu(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ut^2}dt = \frac{1}{\sqrt{u}}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}ds = \sqrt{\frac{\pi}{u}}$ et comme

$$\forall v \in \mathbb{R}, \mu'(v) = -\frac{v}{2u}\mu(v)$$

alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall v \in \mathbb{R}, \mu(v) = ce^{-\frac{v^2}{4u}}$

et pour $v = 0$ on obtient $\sqrt{\frac{\pi}{u}} = c$, donc $\forall v \in \mathbb{R}, \mu(v) = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-\frac{v^2}{4u}}$.

C.2.b.i) On a d'aprés la question précédente, pour tout $u > 0,$

$$\begin{aligned}f_v(u) = \mu(v) &= \sqrt{\pi}\,u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v^2}{4u}} \\ &= \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{f(u)}{2}}e^{-\frac{v^2}{4u}} \quad (\text{ d'aprés 1.b) de la partie 2})\end{aligned}$$

ii) On a d'aprés 1.a), 1.b), 1.c) et 2.d) de la partie 2, les applications

$$z \to e^z,\ \ z \to \ln(|z|) + i\arcsin\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right),\ z \to z \text{ et } f_v$$

vérifient (H), et comme $\forall z \in \Omega,\ z \neq 0$, alors d'aprés 4) de la partie 2)

l'application $h\,:\,z \to \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{f(z)}{2}}e^{-\frac{v^2}{4z}}$ vérifie (H).

iii) On a f_v et $h\,:\,z \to \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{f(z)}{2}}e^{-\frac{v^2}{4z}}$ vérifient (H), donc $g := f_v - h$ la vérifie aussi.

D'autre part, $D(1,1) \subset \Omega$, donc d'aprés 5) de la partie 3) il existe une suite

$(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall z \in D(1,1),\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-1)^n$.

Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est non nulle on aura d'aprés d'aprés 2.b) des préliminaires

l'existence de $r \in]0,1[$ tel que $\forall z \in D(1,r)\backslash\{1\},\ g(z) \neq 0$

ce qui est absurde car d'aprés la question précédente i), on a $\forall u > 0,\ g(u) = 0$.

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est nulle, donc $\forall z \in D(1,1),\ g(z) = 0$ et comme d'aprés 1.c)

partie 1), Ω est connexe par arcs alors d'aprés B on a $\forall z \in \Omega$,

$g(z) = 0,$ finalement $\forall z \in \Omega,\ \int_{\mathbb{R}} e^{-zt^2+ivt}dt = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{f(z)}{2}}e^{-\frac{v^2}{4z}}$.

auteur : Lhachimi enseignant en MP* à Marrakech

email: lllahcen@gmail.com