

CONCOURS MARROCAIN 2005 MATHS II .
 corrigé de Brahim Benmimoun (MP MEKNES).

I) PRÉLIMINAIRES

1 Remarque : si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $D_{f_\alpha} = \mathbb{R}$.

1.1 f_α est de classe C^1 sur $] - 1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] - 1, +\infty[; (1+x)f'_\alpha(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0.$$

1.2 Puisque $R > 0$: S_a est de classe C^∞ sur $] - R, R[$.

1.2.a Si $x \in] - r, r[$ où $r = \min(1, R)$, par injection dans l'équation (1) on trouve :
 S_a est solution de (1) ssi $\forall k \in \mathbb{N}; (k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$.

1.2.b Une récurrence immédiate donne :

$$a_k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)}{k!} a_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2.c si $\alpha \in \mathbb{N}$ il est clair que S_a est un polynôme donc le rayon est infini.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ par le critère d'Alembert le rayon de convergence est 1.

Si $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{N}$ on a f_α est solution du problème de Cauchy :

$$y(0) = 1, (1+x)y' - \alpha y \text{ sur }] - 1, +\infty[.$$

D'après le théorème de Cauchy - Lipschitz la somme de la série entière S_a qui vérifie $S_a(0) = 1$ coïncide avec f_α sur $] - 1, 1[$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$ S_a coïncide avec f_α même sur $] - \infty, +\infty[$.

1.3 $f_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_0^{+\infty} b_k x^k$ en utilisant le produit de Cauchy :

$$(f_{\frac{1}{2}})^2(x) = 1+x \iff \forall q \geq 2; \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k}, b_0 = 1.$$

2

2.1 $u^{p-1} \neq 0$ d'où l'existence de x_0 vérifiant $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

2.2 Soient $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})$ des réels vérifiant : $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$ si on suppose $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \neq$

$(0, \dots, 0)$ soit $j = \{i/\alpha_i \neq 0\}$ alors $\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$ d'où en composant par u^{p-1-j} on trouve :

$\alpha_j u^{p-1}(x_0) = 0$ de sorte que $\alpha_j = 0$ d'où une contradiction.

2.3 $(x_0, \dots, u^{p-1}(x_0))$ une famille libre de cardinal p d'un espace vectoriel de dimension n , on en déduit que $p \leq n$ comme $u^p = 0$ alors $u^n = u^{n-p}u^p = 0$.

2.4 X^p est un polynôme unitaire annulateur de u donc Π^u divise X^p de sorte que Π^u est de la forme X^j où $j \leq p$.

si $j < p$ alors l'expression $u^j = 0$ menerait à une contradiction en conclusion : $\Pi_u = X^p$.

II ETUDE D'ÉQUATIONS DU TYPE $X^2 = A$ DANS $M_n(\mathbb{R})$

A. un exemple

1. on vérifie facilement que $sp(A) = 1, 2, 3$ et donc A admet trois valeurs propres distinctes de sorte que $A \in M_3(\mathbb{R})$ admet est diagonalisable.

2. on note $1 = \lambda_1, 2 = \lambda_2, 3 = \lambda_3$ on vérifie que $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui sont distinctes donc (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbf{R}^3 on note $B = (e_1, e_2, e_3)$.

$$D = Mat(u, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

4.1 Facilement $v^2 = u, uv = vu$.

4.2 $uv(e_i) = \lambda_i v(e_i) \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ainsi $v(e_i) \in Ker(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}}) = Ved(e_i)$ d'où $v(e_i)$ est colinéaire à e_i on note $v(e_i) = \alpha_i e_i$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$4.3 \text{ Mat}(v, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$v^2 = u$ on trouve $\alpha_i^2 = \lambda_i$ de sorte que $\alpha_i \in \{-\lambda_i, \lambda_i\}$.

5. on trouve huit solutions de la forme $X = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $\alpha_i \in \{-\lambda_i, \lambda_i\}$.

B. Quelques résultats généraux

1.

1.1 $v^2 p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1}$

on a v est nilpotent d'indice noté $q \in 2p-1, 2p$ or $q \leq n$ d'où $2p-1 \leq q \leq n$ de sorte que $p \leq \frac{n+1}{2}$.

1.2 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent d'indice $p = 2$ qui ne vérifie pas $2 \leq \frac{2+1}{3}$ D'où le résultat.

$$2. \text{ Par un calcul facile } \omega^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i u^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j u^j \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^q b_i b_{q-i} \right) u^q$$

$$= \sum_{q=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^q b_i b_{q-i} \right) u^q = b_0^2 I_E + 2b_0 b_1 u = I_E + u.$$

3.1 D'après 1.2 on a $(x_1, \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre ayant n éléments donc base de E et par suite $g(x)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_1)$.

3.2 $gu = g(g^2 - I) = (g^2 - I)g = ug; B = (x_1, \dots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E on vérifie facilement que $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} g(u^j(x_1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(u^j(x_1))$ d'où le résultat.

3.3 $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$ on applique à x_1 on trouve alors le résultat.

$$I_E + u = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \right)^2 = \sum_{q=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^q \alpha_i \alpha_{q-i} \right) u^q$$

puisque $(I_E, u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre on trouve alors le résultat.

3.4 $\alpha_0^2 = 1 = b_0^2$ soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\alpha_0 = \epsilon b_0$ on note par une recurrence finie simple que $\alpha_i = \epsilon b_i, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ ainsi $g = -\omega$ ou $g = \omega$.

4. Application

$$\text{on note } M = I + J \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En considérant l'endomorphisme u de \mathbb{R}^4 associé à J ; qui est nilpotent d'indice 4

d'après l'étude précédente on trouve $X^2 = M \iff X = \sum_{i=0}^3 \alpha_i J^i$ ou $X = -\sum_{i=0}^3 b_i J^i$.

5.1 $\nu d = d\nu$ d'où $(d - \lambda I_E)\nu = \nu(d - \lambda I_E)$ d'où $E_k = \text{Ker}(d - \lambda I_E)$ est stable par ν

Si p l'indice de nilpotente de ν alors $\nu_\lambda^p = 0$ d'où ν_λ est nilpotent on note son indice $p_\lambda (p_\lambda \leq p)$.

5.2 Soit $\lambda \in S_p(d)$

Soit $x_0 \in E_\lambda$ tel que $\nu^{p_\lambda-1}(x_0) \neq 0$ alors $d(\nu^{p_\lambda-1}(x_0)) = u(\nu^{p_\lambda-1}(x_0)) = \lambda \nu^{p_\lambda-1}(x_0)$

et comme $\nu^{p_\lambda-1}(x_0) \in E_\lambda$ alors λ est une valeur propre de d

On a $sp(d) \subset sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc 0 n'est pas une valeur propre de d et par suite d est inversible.

5.3

d étant diagonalisable donc : $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distincts de d .

Si $x = \sum_{i=1}^r x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $d(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$.

5.4

Si δ endomorphisme de E vérifiant $\delta^2 = d$ et $\nu\delta = \delta\nu$ alors δ laisse stable les espaces propres de d et $\delta^2|_{E_{\lambda_i}} = \lambda_i I_{E_{\lambda_i}}$.

Il suffit de prendre $\delta|_{E_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i} I_{E_{\lambda_i}}$.

Soit alors δ endomorphisme de E défini par :

Si $x = \sum_{i=1}^r x_i$ où $x_i \in E_{\lambda_i}$ alors $\delta(x) = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} x_i$.

On vérifie facilement que : $\delta^2 = d$ et $\nu\delta = \delta\nu$.

5.5

$\det(\delta^2) = (\det\delta)^2 = \det(d) \neq 0$ donc $\det(\delta) \neq 0$ et par suite δ est inversible.

On a : $\nu\delta^{-2} = \nu(\delta^2)^{-1} = \nu d^{-1}$ or $\nu d = d\nu$ et donc $d^{-1}\nu = \nu d^{-1}$.

Ainsi $\nu\delta^{-2} = \delta^{-2}\nu$ et par suite $(\nu\delta^{-2})^n = (\nu)^n(\delta^{-2})^n = 0$.

D'où $\nu\delta^{-2}$ est nilpotent.

5.6

D'après II B , si on note $u_1 = \nu\delta^{-2}$ et $w = \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_1^i$.

Alors u_1 est nilpotent et on a $w^2 = I_E + u_1$

Ainsi $w^2\delta^2 = \delta^2 + \nu = d + \nu = u$.

Soit $v = w\delta$ alors :

$$w\delta = \sum_{i=1}^{n-1} b_i (\nu\delta^{-2})^i \delta =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i \delta (\nu\delta^{-2})^i = \delta \sum_{i=1}^{n-1} b_i (\nu\delta^{-2})^i = \delta w.$$

Ainsi $v^2 = (w\delta)^2 = w^2\delta^2 = u$

Enfin il suffit de noter $P = \sum_{i=1}^{n-1} b_i X^i$ on a bien $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III. RACINE CARRÉE D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE POSITIVE.

1.

Notons $N = {}^tMM$ alors : ${}^tN = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = N$ d'où N est symétrique .

Soit $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a :

$${}^tXNX = {}^t(MX)(MX) = \sum_{i=1}^n z_i^2 \geq 0 \text{ où } MX = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}.$$

D'où N est symétrique positive ,on a le même conclusion si M est symétrique.

2.1

A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que : $PA^tP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
où les λ_i sont les valeur propres de A .

[\Rightarrow]

Supposons que A est positive , soit λ une valeur propre et $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que :

$$AX = \lambda X.$$

On a :

$0 \leq {}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$ où $\|X\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et donc λ est positive.

[\Leftarrow]

A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que :

$$PA^tP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

où les λ_i sont les valeur propres de A ,on note ensuite $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$\text{Si } X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R}); {}^tXAX = {}^tX^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 \geq 0 \text{ avec } PX = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi A est positive . 2.2

Même raisonnement en remplaçant les inégalités larges par les inégalités strictes .

3.1

A étant réelle symétrique soit donc P matrice orthogonale telle que : $PA^tP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$
matrice qu'on note D .

où les λ_i sont les valeur propres de A qui sont positives car A est symétrique positive

Soit $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on à alors :

$$A = {}^tPDP = {}^tP\Delta\Delta P = ({}^tP\Delta P)({}^tP\Delta P) = B^2 \text{ où } B = {}^tP\Delta P.$$

Il est clair que B est symétrique, positive car ses valeur propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$ positives d'où le résultat .

Si $A \in S_n^{++}$ alors $B \in S_n^{++}$ puisque les $\sqrt{\lambda_i}$ seront strictements positives.

3.2

(a) f et g commutent donc tout espace propre de f est stable par g

(b) g est un endomorphisme autoadjoint donc diagonalisable et par suite g_λ est aussi diagonalisable .

Considérons $\alpha \in Sp(g_\lambda) \subset Sp(g) \subset \mathbb{R}^+$, alors $\alpha^2 \in Sp(g_\lambda^2)$.

Or $f = g^2$ donc $\lambda I_{E_\lambda(f)} = g_\lambda^2$ et par suite $\alpha^2 = \lambda$, ainsi $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

En conclusion $Sp(g_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$ et donc $g_\lambda = \sqrt{\lambda}E_\lambda(f)$.

(c) f est un endomorphisme autoadjoint donc diagonalisable et par suite $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

Si $x = \sum_{\lambda \in Sp(f)} x_\lambda$ alors : $g(x) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \sqrt{\lambda}x_\lambda$

Ainsi g est complètement déterminé ; de plus $B = Mat(g, B_c)$ où B_c est la base canonique de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, d'où l'unicité de B .

3.3

Soit B_1 une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$ alors :

$A = PDP^{-1}$ et $\sqrt{A} = PD_1P^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D_1 = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$
(où les λ_i sont les valeurs propres de A et P la matrice de passage de B_c à B_1).

Notons R le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux suites :

$(\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_r), (\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_r})$ avec $Sp(A) = \{\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_r\}$.

Alors $R(D) = D_1$ et par suite $R(A) = R(PDP^{-1}) = PR(D)P^{-1} = PD_1P^{-1} = \sqrt{A}$, d'où le résultat .

4.1

$A \in S_n^+$ donc $\sqrt{A} \in S_n^+$.

On a : $A = {}^t(\sqrt{AC}\sqrt{A}) = {}^t(\sqrt{A}){}^t(C){}^t(\sqrt{A}) = \sqrt{A}\sqrt{C}\sqrt{A}$.

D'autre part : Si $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a : ${}^tX\sqrt{AC}\sqrt{A}X = {}^t(\sqrt{A}X)C\sqrt{A}X = {}^tYCY \geq 0$

où $Y = \sqrt{A}X$ ainsi $\sqrt{AC}\sqrt{A}$ est symétrique positive et par suite :

$$0 \leq \sum_{\lambda \in Sp(\sqrt{AC}\sqrt{A})} \lambda = Tr(\sqrt{AC}\sqrt{A}) = Tr(\sqrt{A}\sqrt{AC}) = Tr(AC).$$

4.2

Puisque A est définie positive il en est de même de \sqrt{A} et donc \sqrt{A} est inversible ,notons $S = \sqrt{AC}\sqrt{A}$ qui est symétrique réelle donc diagonalisable ainsi AC est diagonalisable car $\sqrt{A}S(\sqrt{A})^{-1} = AC$.

5.1

AB est symétrique en effet : ${}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA{}^tB = AB$.

Soit P et Q deux polynômes tels que : $\sqrt{A} = P(A)$ et $\sqrt{B} = Q(B)$.

Puisque A et B commutent il en est de même de A et $Q(B)$ et par suite $P(A)$ et $Q(B)$ commutent , d'où le résultat .

5.2

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} = (\sqrt{A})^2(\sqrt{B})^2 = AB.$$

Or \sqrt{A} et \sqrt{B} sont symétriques et commutent donc $\sqrt{A}\sqrt{B}$ est symétrique et par suite $AB = (\sqrt{A}\sqrt{B})^2$ est symétrique positive (cf : question III.1)

5.3

On a \sqrt{A} et \sqrt{B} sont deux éléments de S_n^+ qui commutent donc d'après III.5.1 et III. 5.2 : $\sqrt{A}\sqrt{B}$ est un élément de S_n^+ .

Comme $\sqrt{A}\sqrt{B} \in S_n^+$ et $(\sqrt{A}\sqrt{B})^2 = AB$ alors d'après III.3 : $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

6.1

Soit $(M_n)_n$ une suite à éléments dans S_n^+ qui converge vers une matrice M de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${}^tM_n = M_n$ et ${}^tX M_n X \geq 0$.

En tendant n vers l'infini et en utilisant la continuité des endomorphismes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définis par : $A \mapsto {}^tX A X$, $A \mapsto {}^tA$ on trouve :

$${}^tM = M, {}^tX M X \geq 0.$$

Ainsi S_n^+ est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Autre façon : considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $A \mapsto {}^tA - A$ qui est évidemment continu , par suite $S_n = f^{-1}\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part pour $X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ notons g_X l'application de S_n dans \mathbb{R} définie par :

$$A \mapsto {}^tX A X, g_X \text{ est continue et Comme } S_n^+ = \bigcap_{X \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})} g_X^{-1}[0, +\infty[\text{ alors } S_n^+ \text{ est un fermé } S_n$$

(comme intersection de fermés de S_n)et par suite fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

6.2

Notons $\varphi : X \mapsto X^2$ l'application de S_n^+ dans lui même il est clair que φ est continue et $\varphi \circ \Phi = I_{S_n^+}$ ainsi Φ est bijective et $\Phi^{-1} = \varphi$.

6.3

$(A_k)_k$ converge vers A donc par continuité de la trace ; $(Tr(A_k))_k$ converge vers $Tr(A)$.

D'autre part $\|\sqrt{A_k}\|^2 = Tr({}^t\sqrt{A_k}\sqrt{A_k}) = Tr(A_k)$ qui le terme d'une suite convergente donc la suite $(\sqrt{A_k})_k$ est bornée.

6.4

la suite $(\sqrt{A_k})_k$ du fermé S_n^+ est bornée donc possède au moins une valeur d'adhérence,

il existe une sous suite $(\sqrt{A_{\chi(k)}})_k$ de $(\sqrt{A_k})_k$ qui converge vers un certain C de S_n^+ .

Si C_1 et C_2 deux valeur d'adhérences de $(\sqrt{A_k})_k$,soient alors $(\sqrt{A_{\chi_1(k)}})_k$ et $(\sqrt{A_{\chi_2(k)}})_k$ deux sous suites de $(\sqrt{A_k})_k$ qui convergent respectivement vers C_1 et C_2 .

Donc on composant par φ qui est continue et en utilisant la convergence de la suite $(A_k)_k$ on trouve $C_1^2 = A = C_2^2$ or φ est bijective et donc $C_1 = \sqrt{A} = C_2$.

D'où la suite $(\sqrt{A_k})_k$ possède une unique valeur d'adhérence qui n'est d'autre que \sqrt{A} d'où : $(\Phi(\sqrt{A_k}))_k$ converge vers \sqrt{A} .

En conclusion Φ est continue.

7.1

Il est clair que l'application $H \mapsto AH + HA$ est un endomorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ montrons qu'elle est injective .

soit $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $AH + HA = 0$.

$A \in S_n^+$ donc diagonalisable et ses valeur propres sont strictements positives .

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) une base de vecteurs propres de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A , notons λ_i la valeur propre associée à X_i pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors $(AH + HA)^t X_i = 0$ et donc $AH^t X_i = -HA^t X_i$ et par suite $AH^t X_i = -\lambda_i H^t X_i$ donc nécessairement $H^t X_i = 0$ car si non A aurait une valeur propre négative $-\lambda_i$ ce qui est en contradiction avec $sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

En conclusion $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; H^t X_i = 0$ et par suite $H = 0$ car l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé est nul sur la base (X_1, X_2, \dots, X_n) .

D'où $H \mapsto AH + HA$ est un automorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

7.2

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

si $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on a alors :

$$\Psi(A + H) - \Psi(A) = (A + H)^2 - A^2 = \underbrace{AH + HA}_{\text{lineaire en H}} + \underbrace{H^2}_{\text{négligeable par rapport à H}}$$

Donc Ψ est différentiable en A et $\forall H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$d\Psi(A)(H) = AH + HA$$

7.3

L'application notée $\tilde{\Psi} : A \mapsto A^2$ de S_n^+ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est différentiable qui réalise une bijection de l'ouvert S_n^{++} de S_n^+ dans lui même .

De plus $\forall A \in S_n^{++}; d\tilde{\Psi}(A) = d\Psi(A)$ est un automorphisme de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\tilde{\Psi}$ réalise un difféomorphisme de S_n^{++} dans lui même .