.

Mamouni My Ismail

Contrôle 2

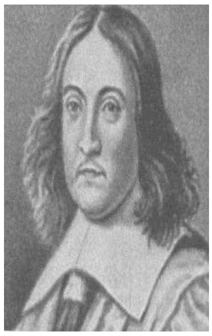
Racine d'un endomorphisme

MP-CPGE Rabat

16 Octobre 2010
Durée : 2 heures
Source : CCP 2010, PC, Math 1

Blague du jour

● A combien rouliez-vous ? demande le gendarme.
- A deux seulement, mais si vous voulez monter, il reste de la place.
● Quelle est la différence entre un agent de police et une cocotte-minute ?
Il n'y en a pas car pour tous les deux, ds qu'ils sifflent c'est cuit !
● Un gendarme fait stopper une automobile :
- Vous n'aviez pas vu le feu rouge ?
- Si si. C'est vous que je n'avais pas vu !



Mathématicien du jour

Pierre de Fermat (160 ?-1665)

Juriste et mathématicien français, surnommé le prince des amateurs. Il cachait ses méthodes, dont quelques-unes ont été perdues avec lui. Il s'est aussi aux sciences physiques ; on lui doit notamment le Principe de Fermat en optique. Il est le premier inventeur du calcul différentiel dont il est un précurseur : il est le premier utiliser la formule (sinon le concept) du nombre dérivé (découvert par un grand mathématicien indien, Aryabhata). Il pose avec Blaise Pascal les bases du calcul des probabilités. Fermat est l'inventeur d'une méthode de démonstration : la descente infinie

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f, Ker (f) et Im (f) désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par : $P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$ où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^\star$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \ldots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

4) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{id} & = & p+q \\ f & = & \lambda p + \mu q \\ f^2 & = & \lambda^2 p + \mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f - \lambda\text{id}) \circ (f - \mu\text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q$$

6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

10) En déduire que si $\dim(E) \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.