.

Mamouni My Ismail

Corrigé Contrôle 2

Racine d'un endomorphisme

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Une administration envahi de souris, fait appel à un dératiseur qui, sans succès, décide de laisser un chat sur place pour quelque temps. Et très vite, on ne voit plus aucune souris. Le responsable de l'administration, très content des services du chat demande au dératiseur de laisser le chat rester dans les locaux. Quelques mois plus tard, les souris font leur réapparition dans le bâtiment... Le gars refait passer le dératiseur et lui demande ce qui a pu se passer. Le dératiseur répond :
- C'est le chat... Maintenant qu'il est titularisé...

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Mathématicien du jour

Mathématicien français. Il fit d'importantes contributions à la statistique, à la théorie des nombres, aux algèbres abstraites et à l'analyse. Une grande partie de son travail fut perfectionné par d'autres : son travail sur les racines des polynômes inspira la théorie de Galois ; le travail de Abel sur les fonctions elliptiques fut construit sur celui de Legendre ; certains travaux de Gauss en statistique et en théorie des nombres complétèrent ceux de Legendre.
Dans ses travaux de géométrie, Legendre reste connu pour avoir tenté de démontrer en vain le cinquième postulat d'Euclide. En arithmétique d'avoir finalisé la preuve du dernier théorème de Fermat pour $n = 5$, d'avoir apport des éléments de preuve la loi de réciprocité quadratique, conjecture par Euler et prouve ultérieurement par Gauss. Et enfin son théorème : le nombre d'entiers premiers supérieur à x est équivalent $\dfrac{x}{\ln x}$.

PARTIE 1 A

1. $\chi_A(X) = X(X-1)(X-4)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
2. $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (0,-2,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$. $D = diag(0,1,4)$.
3. $A^m = PD^mP^{-1}$.
4. $H^2 = D \Longrightarrow HD = H^3 = DH$.
5. Posons $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$, en résolvant le système de 9 équations issues de la relation $HD = DH$, on obtient $b = c = d = f = x = y = 0$, d'où $H = diag(a,e,z)$ et enfin $A = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -a & 0 & z \\ -\frac{a}{2} & -\frac{e}{2} & -\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

B

1. $J^2 = 3J$ et par récurrence $J^m = 3^{m-1}J$ pour $m \geq 1$, mais $J^0 = I_3$.
2. On remarque que $A = I_3 + J$ avec $I_3.J = J.I_3$, donc $A^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} J^k = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{m} 3^k\right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$

3. $f^2 = id + 5j = id + 5(f - id) = 5f - 4id$, donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de f, d'où π_f divise $(X-1)(X-4)$, mais $f \neq id$ et $f \neq 4id$, d'où $\pi_f = (X-1)(X-4)$ donc $\mathrm{sp}(f) = \{\lambda = 1, \mu = 4\}$.
4. A est diagonalisable car symétrique, donc f est diagonalisable, d'où $E = E_\lambda \oplus E_\mu$, soit p et q les projections adaptés à cette écriture, d'après le principe de décomposition spectrale, on a $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = p(x) \in E_\lambda$ et $x_2 = q(x) \in E_\mu$, ainsi $f^m(x) = f^m(x_1) + f^m(x_2) = \lambda^m x_1 + \mu^m x_2 = \lambda^m p(x) + \mu^m q(x)$, donc $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
   Montrons que p et q sont linéairement indépendants. En effet $\alpha p + \beta q = 0 \Longrightarrow \alpha p(x) + \beta q(x) = 0$, $\forall x \in E$, en particulier pour $x \in E_\lambda$ et $x \neq 0$ on obtient $p(x) = x, q(x) = 0$, donc $\alpha = 0$ et pour $x \in E_\mu$ on trouve $\beta = 0$.
5. $p^2 = p, q^2 = q, p \circ q(x) = 0$ car $q(x) \in E_\mu$ et aussi $q \circ p = 0$.
   Soit $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$, donc $\alpha^2 p + \beta^2 q = \lambda p + \mu q$, or $\{p, q\}$ est libre, d'où $\alpha^2 = \lambda = 1$ et $\beta^2 = \mu = 4$.
6. f diagonalisable, déjà fait.
   Les calculs des éléments propres de f effectués sur sa matrice donnent $\dim E_1 = 2$ dont une base est $v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (-1, 1, 0)$ et $\dim E_4 = 1$ dont une base est $v_3 = (1, 1, 1)$.
   $D = diag(1, 1, 4)$, la matrice de p est $diag(1, 1, 0)$ celle de q est $diag(0, 0, 1)$.
7. $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
8. Prendre h l'endomorphisme associé à la matrice Y dans la base propre (v_1, v_2, v_3), on a $h^2 = f$ car $Y^2 = D$ mais $h \neq \alpha p + \beta q$ car sinon sa matrice dans la base (v_1, v_2, v_3) serait sous la forme $Y = diag(\alpha, \alpha, 4\beta)$ diagonale.