PARTIE 1

A

1 $\chi_A(X) = X(X-1)(X-4)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

2 $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (0,-2,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$. $D = \mathrm{diag}(0,1,4)$.

3 $A^m = PD^mP^{-1}$.

4 $H^2 = D \Longrightarrow HD = H^3 = DH$.

5 Posons $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$, en résolvant le système de 9 équations issues de la relation $HD = DH$, on obtient $b = c = d = f = x = y = 0$, d'où $H = \mathrm{diag}(a, e, z)$ et enfin $A = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -a & 0 & z \\ -\frac{a}{2} & -\frac{e}{2} & -\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

B

1 $J^2 = 3J$ et par récurrence $J^m = 3^{m-1}J$ pour $m \geq 1$, mais $J^0 = I_3$.

2 On remarque que $A = I_3 + J$ avec $I_3.J = J.I_3$, donc $A^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} J^k = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{k}{m}3^k\right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$

3 $f^2 = id + 5j = id + 5(f - id) = 5f - 4id$, donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de f, d'où π_f divise $(X-1)(X-4)$, mais $f \neq id$ et $f \neq 4id$, d'où $\pi_f = (X-1)(X-4)$ donc $\mathrm{sp}(f) = \{\lambda = 1, \mu = 4\}$.

4 A est diagonalisable car symétrique, donc f est diagonalisable, d'où $E = E_\lambda \oplus E_\mu$, soit p et q les projections adaptés à cette écriture, d'après le principe de décomposition spectrale, on a $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = p(x) \in E_\lambda$ et $x_2 = q(x) \in E_\mu$, ainsi $f^m(x) = f^m(x_1) + f^m(x_2) = \lambda^m x_1 + \mu^m x_2 = \lambda^m p(x) + \mu^m q(x)$, donc $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
Montrons que p et q sont linéairement indépendants. En effet $\alpha p + \beta q = 0 \Longrightarrow \alpha p(x) + \beta q(x) = 0$, $\forall x \in E$, en particulier pour $x \in E_\lambda$ et $x \neq 0$ on obtient $p(x) = x, q(x) = 0$, donc $\alpha = 0$ et pour $x \in E_\mu$ on trouve $\beta = 0$.

5 $p^2 = p, q^2 = q, p \circ q(x) = 0$ car $q(x) \in E_\mu$ et aussi $q \circ p = 0$.
Soit $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$, donc $\alpha^2 p + \beta^2 q = \lambda p + \mu q$, or $\{p, q\}$ est libre, d'où $\alpha^2 = \lambda = 1$ et $\beta^2 = \mu = 4$.

6 f diagonalisable, déjà fait.
Les calculs des éléments propres de f effectués sur sa matrice donnent $\dim E_1 = 2$ dont une base est $v_1 = (-1,0,1), v_2 = (-1,1,0)$ et $\dim E_4 = 1$ dont une base est $v_3 = (1,1,1)$.
$D = \mathrm{diag}(1,1,4)$, la matrice de p est $\mathrm{diag}(1,1,0)$ celle de q est $\mathrm{diag}(0,0,1)$.

7 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8 Prendre h l'endomorphisme associé à la matrice Y dans la base propre (v_1, v_2, v_3), on a $h^2 = f$ car $Y^2 = D$ mais $h \neq \alpha p + \beta q$ car sinon sa matrice dans la base (v_1, v_2, v_3) serait sous la forme $Y = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, 4\beta)$ diagonale.

PARTIE II

1 $(f-\lambda\text{id})\circ(f-\mu\text{id}) = f^2-(\lambda+\mu)f+\lambda\mu\text{id} = \lambda^2 p+\mu^2 q-(\lambda+\mu)(\lambda p+\mu q)+\lambda\mu(p+q) = 0$. Ainsi $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de f à racines simples, donc f est diagonalisable.

2 D'après ?? $\text{sp}(f)\subset\{\lambda,\mu\}$, supposons que $\text{sp}(f)=\{\lambda\}$ (par exemple), comme f est diagonalisable, alors $\pi_f=(X-\lambda)$ donc $f=\lambda\text{id}$, d'où $\lambda p+\mu q=\lambda p+\lambda q$, or $q\neq 0$, donc $\lambda=\mu$ (absurde). Donc $\text{sp}(()f)=\{\lambda,\mu\}$.

3 $f=\lambda p+\mu q$ etid $=p+q$, donc $f-\lambda\text{id}=(\mu-\lambda)q$ et $f-\mu\text{id}=(\lambda-\mu)q$, d'après la question ??, on conclut que $-(\lambda-\mu)^2 p\circ q=0$, d'où $p\circ q=0$. De même $q\circ p=0$ car $(f-\mu\text{id})\circ(f-\lambda\text{id})=(f-\mu\text{id})\circ(f-\lambda\text{id})=0$.
D'autre part id $=p+q$, en composant par p, on obtient $p^2=p$ et si on compose par q, on obtient $q^2=q$.

4 Si $\lambda\mu\neq 0$, alors $0\notin\text{sp}(f)$, donc f est un isomorphisme avec $f^2-(\lambda+\mu)f=-\lambda\mu\text{id}$, i.e : $f\circ(f-(\lambda+\mu)\text{id})=-\lambda\mu\text{id}$, donc $f^{-1}=-\dfrac{1}{\lambda\mu}(f-(\lambda+\mu)\text{id})=-\dfrac{1}{\lambda\mu}(\lambda p+\mu q-(\lambda+\mu)(p+q))=\dfrac{p}{\lambda}+\dfrac{\mu}{q}$.

5 Par récurrence pour $m\in\mathbb{N}$ avec $f^{m+1}=f^m\circ f$.
Pour les puissance négatives, vérifier que $(\lambda^m p+\mu^m q)\circ(\lambda^{-m}p+\mu^{-m}q)=\text{id}$, donc $f^{-m}=(f^m)^{-1}=(\lambda^m p+\mu^m q)^{-1}=\lambda^{-m}p+\mu^{-m}q$.

6 $\dim F=2$ car $\{p,q\}$ est libre, en effet, si $ap+bq=0$, on compose par p donc $ap^2=ap=0$, d'où $a=0$ et de même $b=0$.

7 $g\in\mathcal{R}\cap F\Longrightarrow g=ap+bq$ et $g^2=f$, d'où $g^2=a^2p+b^2q=f=\lambda p+\mu q$, or $\{p,q\}$ est libre, donc $a^2=\lambda$ et $b^2=\mu$, d'où $a=\pm\sqrt{\lambda}$ et $b=\pm\sqrt{b}$.

8 $K=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&I_{k-2}\end{pmatrix}$.

9 On a $E=E_\lambda\oplus E_\mu$ car f est diagonalisable et p,q sont ses projecteurs spectraux, donc les matrices respectives de p et q dans une base adaptée seront de la forme $P=\begin{pmatrix}I_k&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}0&0\\0&I_r\end{pmatrix}$ avec k et r les multiplicités respectives de λ et μ dans χ_f. Soit p' l'endomorphisme associé dans cette même base à la matrice $P'=\begin{pmatrix}K&0\\0&0\end{pmatrix}$ vérifiant $K^2=I_k$. K n'est pas diagonale donc $p'\notin F$, d'autre part $P'^2=P$ et $P'Q=QP'=0$.

10 Si $\dim E\geq 3$, alors une des valeurs propres (λ, par exemple) admet une multiplicité supérieure à 2, soit $g=\sqrt{\lambda}p'+\sqrt{\mu}q$, on a $g^2=\lambda p'^2+\mu q=f$, donc $g\in\mathcal{R}(f)$, mais $g\notin F$, car sinon $\sqrt{\lambda}p'+\sqrt{\mu}q=ap+bq\Longrightarrow p'=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}(ap+(b-\sqrt{\mu})q)\in F$ (contradiction).