Corrigé : Pr. Baudin, CPGE Pontoise, France

I. EXEMPLES

① ① Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$P_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(M(\alpha))X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha)$
$= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X)$.
Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$

② Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.

Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.

$\operatorname{rg}(M(0) - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.

Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

$\operatorname{rg}(M(1) - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

② $P_A(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(A)X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))X + \det(A) = -X^3 - X$.
P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale pro}}$

③ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.

$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$

L'ensemble des matrices trianglaires supérieures est fermé comme sous-espace vectoriel en dimension finie, de même pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
$\mathcal{E}_2$ est donc la réunion de deux fermés.

$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc une partie fermée de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

④ Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses é} \\ \text{sont tous non nuls}}$

Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

$$\boxed{A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si } \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0}$$

⑥ ① Si $(\det A = a_{11}a_{22}a_{33})$ et $(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0)$ alors la matrice est MDP
sinon la matrice n'est pas MDP.

② $\boxed{\text{Les matrices à diagonale propre sont } A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 \text{ et } A_8}$

③ $\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

⑦ Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices A et C.
Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.
En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que
$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$
En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que
$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \det M = \det A \det C.}$

⑧ ① Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.
En effet, d'après la question précédente,
$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = P_A(X)P_C(X)$
Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.
On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls}}$

② Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.
De même qu'en a), $P_M(X) = P_A(X)P_C(X)$.
Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors P_A est scindé et $\operatorname{tr}A = a+d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $P_A(X) = (X-e)(X-h)$ et $P_C(X) = (X-a)(X-d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a+d = e+h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. QUELQUES PROPRIETES

⑨ On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$.

Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$.
Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA + bI_n) = a^tA + bI_n$,

$\boxed{a^tA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

⑩ Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p} I_n$.

D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.

D'autre part, $\det U_p = P_A(\dfrac{1}{p})$ est nul si et seulement si $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

Il existe donc un entier P_0 tel que la suite $(U_p)_{p \geq P_0}$ soit une suite d'éléments de G_n. Cette suite converge vers A.

De la caractérisation séquentielle de la densité, on déduit que $\boxed{G_n \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n.}$

❶ ① $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale}}$

② Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$

③ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.

Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } P_A \text{ est scindé.}}$

❷ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

V. MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

❸ $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

❹ ① A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^tP$.

$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(PD^tPPD^tP)$

$= \operatorname{tr}(PDD^tP)$ (car ${}^tPP = I_n$.)

$= \operatorname{tr}(D^2)$ (car $PD^{2t}P$ semblable à D^2 et deux matrices semblables ont la même trace.)

Or $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

② Si de plus A est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$.

Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les}}$

❺ ① A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $P_A(X) = (-1)^n X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton $\boxed{A^n = 0.}$

$({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0.$ $\boxed{({}^tAA)^n = 0.}$

② ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.
$({}^tAA)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles.
On en déduit $\boxed{{}^tAA = 0.}$

③ De ce qui précède, on déduit que $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ donc $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0.$

$\boxed{A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

VI. DIMENSION MAXIMALE DANS $\mathcal{E}_n$

❻ $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

❼ Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\dim F \leq \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vé

❽ On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec
$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

On a déterminé un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset$
mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangu