CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 3 (09-10): *Réduction d'endomorphismes*

5 novembre 2009

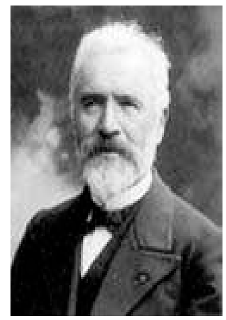
Blague du jour
- **Et que dit 0 en rencontant 8 ?**

Réponse **: Belle ceinture !**
- **Et puisqu'il est toujours question de 8, que vaut 8 divisé par 2 ?**

Réponse **: Verticalement, ça donne 3, horizontalement, ça donne 0.**
- **Soit $\varepsilon > 0$. Que vaut 3ε ?**

Réponse **: 8. Car $3\varepsilon = \varepsilon 3 = 8$.**
- **Quel animal est le plus doué dans le calcul de $\cot^4(a^5)$?**

Réponse **: Le coq, parce que cot(cot(cot(cot(aaaaa)))) !**



Mathématicen du jour ***Jordan***
Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. Il étudia puis enseigna à l'École polytechnique. son nom est associé à un certaines notions mathématiques : la courbe de Jordan, la réduction de Jordan.

Concours Marocain 2000 (cnc), MP.

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geq 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L(E) désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.

Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(u)$ la trace de u et $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u,v) & \mapsto & [u,v] \end{array}$$

et pour $u \in$L(E) l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_u : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & [u,v] \end{array}$$

Pour $(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m. Enfin, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1ère Partie

A- Quelques propriétés de Φ_u

---

1) **Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de L(E).**
2) **Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.**
3) **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.**
   a) **Montrer que $\mathrm{Vect}(\{Id, u, \ldots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\ker \Phi_u$ et que $\dim(\ker \Phi_u) \geq 2$.**
   b) **Montrer que si $v \in \ker \Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.**
4) **Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, Im $\Phi_u \subset \mathcal{T}$.**
   Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u,v] = Id$? Peut-on avoir Im $\Phi_u = \mathcal{T}$?
5) **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.**
   a) **Montrer que u est une homothétie $\Longleftrightarrow$ pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.**
   b) **En déduire que $\ker \Phi_u = \mathcal{L}(E) \Longleftrightarrow u$ est une homothétie.**
6) a) **Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que $(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p$.**
   b) **En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.**

B- Détermination de l'image de Φ.

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1) **u peut-il être une homothétie ?**
2) **Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.**
3) **En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :**

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

   où $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
4) **On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U,V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$**
   a) **Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.**

b) **On pose** $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ **et** $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ **avec** $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ **; établir l'équivalence :**

$$A = U'V' - V'U' \iff [\ {}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S\ ].$$

5) **Montrer alors par récurrence sur** n **que l'image de** Φ **est égale à** $\mathcal{T}$.

C- Détermination de tr(Φ_u).

Soit u **un endomorphisme de** E. **Soient** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **une base de** E **et** $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ **la matrice de** u **dans cette base. Pour** $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $u_{i,j}$ **désigne l'endomorphisme de** E **tel que :**

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1) **Rappeler pourquoi** $(u_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ **est une base de L(E).**

2) **Calculer, pour tout** $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \ldots, n\}^4$**, le produit** $u_{i,j} u_{k,l}$ **et montrer que l'on a :**

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2,\ \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} u_{i,k}\ .$$

3) **En déduire tr**(Φ_u).

2ème Partie

A- Cas où u ***est diagonalisable***

Dans cette question on suppose que u **est diagonalisable.**
On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$. **Pour tout** $i \in \{1, \ldots, p\}, m_i$ **désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre** λ_i **de** u.

1) **Soit** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **une base de** E **formée de vecteurs propres de** u. **Pour simplifier les notations dans cette question, on pose** $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall\ i \in \{1, .., n\}$.

   a) **Montrer que**
   $$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2\ :\ \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}\ .$$

   b) **En déduire que** Φ_u **est diagonalisable et préciser** $\mathrm{Sp}(\Phi_u)$.

2) **Montrer que**
$$\ker \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in \{1, .., p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}.$$

3) **En déduire que** $\ker \Phi_u$ **est isomorphe à** $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \ldots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.
Quel est le rang de Φ_u **?**

4) **On suppose en plus que** u **a** n **valeurs propres distinctes.**
Quel est la dimension de $\ker \Phi_u$ **? Quel est le polynôme minimal de** u **?**
En déduire que $\ker \Phi_u = \mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{n-1})$.

B- Cas où $\dim E = 2$.

Soit u **un endomorphisme de** E **qui n'est pas une homothétie,** $\dim E = 2$.

1) **Montrer que** $\ker \Phi_u = \mathrm{Vect}(Id, u)$ **(on pourra utiliser une base de** E **de la forme** $(e, u(e))$ **dont on justifiera l'existence).**

2) **Montrer que le polynôme caractéristique de** Φ_u **est de la forme** $X^2(X^2 + \beta)$ **avec** $\beta \in \mathbb{K}$.

3) **Si** $\beta = 0$**, l'endomorphisme** Φ_u **est-il diagonalisable ?**

4) **On suppose** $\beta \neq 0$ **; étudier la diagonalisabilité de** Φ_u **selon que** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5) **On suppose** Φ_u **diagonalisable.**

a) **Montrer que** $\mathrm{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ **où** λ **est un scalaire non nul .**

Dans la suite de la question, v **(respectivement** w**) désigne un vecteur propre de** Φ_u **associé à la valeur propre** λ **(respectivement** $-\lambda$**).**

b) **L'endomorphisme** v **peut-il être inversible ? Calculer** $\mathrm{Tr}(v)$ **puis** v^2**.**

c) **Détermination de** $\mathrm{Sp}(u)$ **:**
- **Pour quelles valeurs du vecteur** e **la famille** $(e, v(e))$ **est-elle une base de** E **?**
- **Vérifier que la matrice de** u **dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que** $\mathrm{Sp}(u) = \{\frac{\mathrm{Tr}(u)-\lambda}{2}, \frac{\mathrm{Tr}(u)+\lambda}{2}\}$**. Que peut-on alors dire de** u **?**

d) **Montrer que** $E = \ker v \oplus \ker w$ **puis en déduire que** u **est diagonalisable.**

C- Cas où Φ_u ***est diagonalisable.***

Soit u **un endomorphisme de** E **tel que** Φ_u **soit diagonalisable et** $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$**. Soit** $(v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ **une base de L(E) formée de vecteurs propres de** Φ_u **de sorte que** $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i,\ \forall i \in \{1, .., n^2\}$**. Soit enfin** $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ **et** $x \in E$ **un vecteur propre associé.**

1) **Calculer** $u(v_i(x))$ **en fonction de** $\lambda,\ \beta_i$ **et** $v_i(x)$**.**
2) **Montrer que l'application** $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E, \quad v \mapsto v(x)$ **est linéaire surjective.**
3) **Montrer alors que** u **est diagonalisable.**

3ème Partie

Soit λ **une valeur propre non nulle de** Φ_u **et** v **un vecteur propre associé ; on désigne par** P_u **le polynôme caractéristique de** u**.**

1) a) **Montrer que** $\forall x \in \mathbb{K},\ v(u - xId) = (u - (x+\lambda)Id)v$**.**
   b) **Qu'en déduit-on sur** P_u **si** $\det \neq 0$**.**
   c) **Montrer alors que l'endomorphisme** v **n'est pas inversible.**
2) **Montrer que** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$ **; qu'en déduit-on si** $v^p \neq 0$ **pour un certain** $p \in \mathbb{N}^*$ **?**
3) **Conclure que** v **est un endomorphisme nilpotent.**
   Dans la suite on suppose que $\dim\ker v = 1$
4) a) **Montrer que pour tout** $p \in \{1, 2, ..., n\}$**, Im** (v^p) **est stable par les endomorphismes** u **et** v**.**
   b) **Soit** $p \in \{1, 2, ..., n-1\}$ **; en considérant les endomorphismes** v_1 **et** u_1 **induits par** v **et** u **sur Im** v^p**, montrer que** $\dim(\mathbf{Im}\ v^p) = 1 + \dim(\mathbf{Im}\ v^{p+1})$**.**
   c) **Déduire de ce qui précède que** $v^{n-1} \neq 0$ **et** $v^n = 0$**.**
5) **Soit** $e \in E$ **tel que** $v^{n-1}(e) \neq 0$ **; montrer que la famille** $\mathcal{B} = (e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ **est une base de** E **et écrire la matrice de l'endomorphisme** v **dans cette base.**
6) **On pose** $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) /\ wv - vw = \lambda v\}$**.**
   a) **Montrer que** $\mathcal{A}$ **contient un endomorphisme** w_0 **dont la matrice relativement à la base** $\mathcal{B}$ **est** $\mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$**.**
   b) **Montrer que** $\mathcal{A}$ **est un sous-espace affine de L(E) dont on précisera la direction.**
   c) **Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de** $\mathcal{A}$**.**
7) **Quelle est alors la forme de la matrice dans la base** $\mathcal{B}$ **de l'endomorphisme** u **?**
8) **On suppose dans cette question que la matrice de** u **dans une base** $\mathcal{B}'$ **de** E **est de la forme** $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha+\lambda, \alpha+2\lambda, \ldots, \alpha+(n-1)\lambda)$ **; décrire par leur matrice dans la base** $\mathcal{B}'$ **les éléments de l'espace** $E_{\Phi_u}(\lambda)$ **; quelle est sa dimension ?**

Fin
à la prochaine