.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 3
Déterminants par blocs

MP-CPGE Rabat

4 Octobre 2010

Source : e3a,PSI-2010, Epreuve B

Blague du jour

- Trois statisticiens vont la chasse au canard. Un canard décolle. Le premier tire et passe dix centimètres au-dessus. Le second tire et passe dix centimètres en-dessous. Le troisième, tout sourire : "c'est bon les gars, on l'a eu !"
- La vie est complexe, elle a une partie relle et une autre imaginaire.
- Qu'est-ce qu'un ours polaire ? C'est un ours cartsien qui a changé ses coordonnés.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Mathématicien du jour

Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.
Enfant prodige ; et doué pour les langues à l'âge de 7 ans, il parlait déjà en hébreu et, à l'âge de 13 ans, sous la direction de son oncle qui est linguiste, il parlait déjà 13 langues : le persan, l'arabe, l'hindousthânî, le sanskrit, le malais,....

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder le partie $\mathbf{B}$ en admettant le résultat de la question $\mathbf{A.3.b}$.
Soit n un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. On note respectivement I_n et O_n la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice A est noté $\det(A)$, sa trace $\mathrm{Tr}(A)$ et son polynôme caractéristique est désigné par $P_A(X)$.

Partie A.

1. Soient A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   a. Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :
   $$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(D),\ \det\left(\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \det\left(\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\right) = \det(A)$$
   b. En déduire $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$.
   c. De la question précédente, déduire $\det\left(\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$.
2. Dans toute la suite de cette partie, A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs
   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$
   A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors on a
   $$\det(M) = \det(AD - BC)$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
   a. Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \in S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.
   b. En déduire que l'on a $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B.

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$R_A \; : \; X \mapsto AX \quad \text{et} \quad L_A : \; X \mapsto XA$$

1. Déterminer les matrices de R_A et L_A dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $R_A - qL_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q\,{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q\,{}^tA \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes
   a. $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$,
   b. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \det\left(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix}\right)$,
   c. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \left((1+q)^2 \det(A) - q(\operatorname{Tr}(A))^2\right)$.
4. On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
   a. Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.
   b. A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
      - il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$
      - on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.